Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS2018
10.09.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

(a) Lösen sie das folgende Anfangswertproblem

$$y' + (1-2x)y + (x-1)y^2 = -x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = 2.$$

Hinweis: Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist leicht zu erraten.

(b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(y')^2 + 4xy' - 4y = 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

(i) Bestimmen Sie möglichst viele Lösungen der obigen Differentialgleichung in expliziter Form $y = y(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $y_0 \geq 0$ das obige Anfangswertproblem mindestens eine Lösung besitzt. Für welche $y_0 \geq 0$ ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar?

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Die Funktion $\phi \equiv 1$ ist eine partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung.

Sei $g(x) := 1 - 2x$, $h(x) := x - 1$ und $k(x) := -x$. Da es sich bei der Differentialgleichung um eine Riccatische Differentialgleichung handelt, ist laut Vorlesung ihre allgemeine Lösung durch

$$y(x) = 1 + \frac{1}{z(x)}$$

gegeben, wobei z die Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$z' - (g(x) + 2\phi(x)h(x))z - h(x) = z' + z + 1 - x = 0$$

durchläuft. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung z_h ist durch

$$z_h(x) = ce^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

gegeben, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine freie Konstante ist. Eine partikuläre Lösung der homogenen Gleichung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel wie folgt gegeben

$$z_p(x) = e^{-x} \int_0^x e^s(s-1)\,\mathrm{d}s = e^{-x}\left[(s-2)e^s\right]_{s=0}^x = x - 2 + 2e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt ist also

$$y(x) = 1 + \frac{1}{x - 2 + Ae^{-x}}$$

die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ legt $A = 3$ fest.

(b) (i) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung. Untersuche zunächst, ob Geraden $y(x) = ax+b$ als Lösungen in Frage kommen. Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$a^2 + 4xa - 4ax - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{4}.$$

Also ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Gerade

$$y_a(x) = ax + \frac{a^2}{4} \qquad x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung.

Führe nun den Parameter $t = y'$ ein und suche eine Parameterlösung y_p der Differentialgleichung. Betrachte dazu $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$ als Funktionen von t. Eingehen in die Differentialgleichung liefert

$$t^2 + 4\psi t - 4\chi = 0. \tag{1}$$

Differenzieren nach t ergibt

$$2t + 4\dot{\psi}t + 4\psi - 4\dot{\chi} = 2t + 4\psi = 0 \Leftrightarrow \psi(t) = -\frac{t}{2},$$

wobei die verwendete Gleichung $\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}$ nach der Kettenregel und Definition von ψ gilt. Einsetzen von ψ in (1) liefert

$$\chi(t) = -\frac{t^2}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad y_p(x) = -x^2.$$

(ii) Ist $y_0 > 0$, so sind die oben berechneten Geraden $y_{-2\sqrt{y_0}}$ und $y_{2\sqrt{y_0}}$ zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems. Ist $y_0 = 0$, so ist sowohl $y \equiv 0$ als auch y_p Lösungen des Anfangswertproblems. Dies zeigt, dass das Anfangswertproblem für jedes $y_0 \geq 0$ lösbar ist aber für kein $y_0 \geq 0$ ist die Lösung eindeutig.

Aufgabe 2:

Auf der Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, \, y > 0\}$ sei die Differentialgleichung

$$y(x + y)\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen Eulerschen Multiplikator $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Form $\mu(x, y) = \nu(xy^\alpha)$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie die Lösungen der obigen Differentialgleichung in impliziter Form an.

(d) Bestimmen Sie diejenige Lösung, die $y(e) = -e$ erfüllt in expliziter Form $y = y(x)$ und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

Lösungsvorschlag:

(a) Definiere $P(x,y) := y(x+y)$ und $Q(x,y) := -x^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x + 2y \stackrel{!}{=} -2x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

auf keiner nichtleeren offenen Teilmenge von D erfüllt ist (Vertauschbarkeitsbedingung), ist die gegebene Differentialgleichung nicht exakt.

(b) Definiere $\tilde{P} := \mu P$ und $\tilde{Q} := \nu Q$. Die Vertauschbarkeitsbedingung liefert

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x,y) = \alpha x y^{\alpha-1}\nu'(xy^\alpha)y(x+y) + \nu(xy^\alpha)(x+2y) \\ \stackrel{!}{=}\ & \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x,y) = -y^\alpha \nu'(xy^\alpha)x^2 - \nu(xy^\alpha)2x \qquad \forall (x,y) \in D \\ \Leftrightarrow\ & 0 = xy^\alpha((\alpha+1)x + \alpha y)\nu'(xy^\alpha) + (3x+2y)\nu(xy^\alpha) \qquad \forall (x,y) \in D. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich legt die Wahl $\alpha = 2$ nahe. Erfüllt ν in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\nu' + \frac{1}{z}\nu = 0 \qquad (z > 0), \tag{2}$$

so erfüllen $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ die Vertauschbarkeitsbedingung. Wegen $\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln(z)$ auf $\mathbb{R}^+$, ist durch

$$\nu(z) = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in \mathbb{R}^+$$

eine Lösung von (2) gegeben. Da $\nu(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^+$, ist durch $\mu(x,y) = \frac{1}{xy^2}$ für $(x,y) \in D$ ein Eulerscher Multiplikator für die gegebene Differentialgleichung gegeben.

(c) Unbestimmte Integration liefert

$$\begin{aligned} \int \tilde{P}(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{y} + \ln(x) + C(y), \\ \int \tilde{Q}(x,y)\,\mathrm{d}y &= -\int \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{y} + C(x) \end{aligned}$$

und legt

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \ln(x) \qquad \forall (x,y) \in D$$

als Stammfunktion nahe. Die Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen in impliziter Form lauten also

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \ln(x) = C \qquad (x,y) \in D \tag{3}$$

mit dem freien Parameter $C \in \mathbb{R}$.

(d) Einsetzen der Anfangsbedingungen legt den freien Parameter C fest, also

$$F(e,-e) = -1 + \ln(e) = C = 0.$$

Auflösen von (3) nach y liefert

$$y(x) = -\frac{x}{\ln(x)} \qquad \forall x \in (1,\infty).$$

Wegen $\lim_{x\to 1+} y(x) = -\infty$, ist das angegebene Existenzintervall maximal.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem Φ für $\vec{y}' = A\vec{y}$ und e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A\vec{y} - t\vec{v} & t \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(0) = \vec{v}, \end{cases} \qquad \text{wobei} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und A wie im vorhergehenden Aufgabenteil.

(c) Formulieren Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ($\gamma, \omega_0 \geq 0$ konstant)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung um.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Das charakteristische Polynom χ_A von A ist durch

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\,\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\left(\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{4}\right) = -(1+\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2) = -(1+\lambda)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Damit ist $\mathrm{spec}(A) = \{-1, 1\}$. Bestimme im Folgenden die Eigen- bzw. Haupträume.

- $E_A(-1)$: Es gilt

$$A - (-1)\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \; \cdot(-5) \\ \mid \cdot 2 \; + \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{5} \\ \mid \cdot \frac{1}{8} \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich $E_A(-1) = \mathrm{lin}\,\{\vec{v}_3\}$, wobei

$$\vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_A(1)$: Es gilt

$$A - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \\ + \\ \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folglich $E_A(1) = \operatorname{lin}\{\vec{v}_2\}$, wobei

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$ und man benötigt daher den Hauptraum $H_A^2(1)$.

- $H_A^2(1)$: Wegen $\dim(E_A(1)) = 1$ ist der Ansatz $(A - \mathrm{id})\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ zielführend. Es gilt

$$(A - \mathrm{id}\,|\,\vec{v}_2) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \mid \cdot 2 \\ + \\ \mid \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also etwa $H_A^2(1) = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ mit

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\Phi(t) = (\vec{\phi}_1(t)\,\vec{\phi}_2(t)\,\vec{\phi}_3(t))$ mit

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1(t) &= (\vec{v}_1 + t\vec{v}_2)e^t = \begin{pmatrix} (2+t)e^t \\ te^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_2(t) &= \vec{v}_2 e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_3(t) &= \vec{v}_3 e^{-t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem für $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Schließlich gilt $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$. Berechne

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} (2+t)e^t & e^t & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{t}{2}\right) e^t & -\frac{t}{2}e^t & 0 \\ \frac{t}{2}e^t & \left(1 - \frac{t}{2}\right) e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Man erkennt sofort, dass $\vec{v} = \vec{v}_3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 ist. Damit ist $e^{tA}\vec{v} = e^{-t}\vec{v}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Variation-der-Konstanten-Formel liefert daher

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{v} - \int_0^t \tau e^{(t-\tau)A}\vec{v}\,\mathrm{d}\tau = \vec{v}e^{-t}\left(1 - \int_0^t \tau e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right) = \vec{v}e^{-t}\left(1 - [(\tau-1)e^{\tau}]_{\tau=0}^{t}\right) \\ &= (1-t)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Setzte $y_1 := x$ und $y_2 := \dot{x}$. Dann gilt

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -2\gamma y_2 - \omega_0^2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+t}u_x + u_t = -tu & (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty), \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) mit dem Charakteristikenverfahren bzw.

(b) durch den Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Das charakteristische System $k'(s) = a(k(s), w(s))$, $w'(s) = b(k(s), w(s))$, wobei

$$a(x,t,w) := \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+t} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b(x,t,w) := -tw,$$

lautet

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= \frac{2k_1(s)}{1+k_2(s)}, && (4) \\ k_2'(s) &= 1, && (5) \\ w'(s) &= -k_2(s)w(s) && (6) \end{aligned}$$

und hat die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} k_1(0) &= x_0, && (7) \\ k_2(0) &= 0, && (8) \\ w(0) &= u(k(0)) = x_0^2. && (9) \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung von (5) mit (8) lautet

$$k_2(s) = s \qquad (s \in \mathbb{R}). \qquad (10)$$

Damit vereinfacht man (4) zu

$$k_1'(s) = \frac{2k_1(s)}{1+s} \qquad (s > -1).$$

Also ist $k_1(s) = C_1(1+s)^2$ für ein $C_1 \in \mathbb{R}$ und alle $s > -1$. Die Anfangsbedingung (7) legt $C_1 = x_0$ fest. Einsetzen von (10) in (6) und Ausnutzen von (9) liefert

$$w(s) = e^{-\frac{s^2}{2}} x_0^2 \qquad \forall s \in (-1, \infty). \tag{11}$$

Zum gegebenen $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ versucht man nun die Gleichung $(x,t) = k(s) = k(s, x_0)$ nach (s, x_0) aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} k(s, x_0) &= (x,t) \\ \Leftrightarrow x = x_0(1+s)^2 \quad &\wedge \quad s = t \\ \Leftrightarrow x_0 = \frac{x}{(1+t)^2} \quad &\wedge \quad s = t. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u(x,t) = w(s, x_0) \Leftrightarrow u(x,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{x^2}{(1+t)^4} \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

(b) Einsetzen des gegebenen Ansatzes in die Anfangsbedingung liefert

$$u(x,0) = v(x)w(0) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

also etwa $v(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $w(0) = 1$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+t} u_x + u_t &= -tu \\ \Leftrightarrow \frac{2xv'(x)}{1+t} w(t) + v(x)w'(t) &= -tv(x)w(t) \\ \Leftrightarrow \frac{4x^2}{1+t} w(t) + x^2 w'(t) &= -tx^2 w(t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ \Leftrightarrow w'(t) &= -\left(t + \frac{4}{1+t}\right) w(t) \qquad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für w. Es gilt

$$\int_0^t s + \frac{4}{1+s} \, \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2} + 4 \ln(1+t) \qquad t \in [0, \infty)$$

und folglich $(w(0) = 1)$

$$w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{(1+t)^4} \qquad t \in [0, \infty).$$

Insgesamt ist also das Ergebnis des letzten Aufgabenteils bestätigt, d.h. es gilt in der Tat

$$u(x,t) = v(x)w(t) = \frac{x^2}{(1+t)^4} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$