Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie Wintersemester 2009/2010

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Institut für Analysis
Kaiserstr. 89, D – 76128 Karlsruhe, Germany
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst gewöhnliche Differentialgleichungen in expliziter Form

$$y' = f(x, y),$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^2$ in der Regel offen ist, und erinnern an die

Definition: Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$, wobei $\emptyset \neq \widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und für alle $x \in \widetilde{I}$ gilt

$$(x, \phi(x)) \in D \quad \text{und} \quad \phi'(x) = f(x, \phi(x)).$$

Da f stetig ist, ist ϕ in $\widetilde{I}$ sogar stetig differenzierbar.

Auch **Anfangswertprobleme** der Form

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

wobei f wie oben und $(x_0, y_0) \in D$ ist, haben wir schon kennengelernt. Eine Lösung $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung ist ein *Lösung des Anfangswertproblems*, falls zusätzlich $\phi(x_0) = y_0$ gilt.

27 Elementare Methoden für Differentialgleichungen

27.1 Wiederholung: die lineare Differentialgleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

wobei $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ sind.

Erinnerung: Ist $A : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi$ für $x \in I$, so ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Gleichung $y' = a(x)y$ ist

$$y(x) = c e^{\int a(x)\, dx}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
Eine *spezielle* Lösung der *inhomogenen* Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$ erhält man durch den Ansatz

$$y(x) = c(x) e^{\int a(x)\, dx} \quad \text{(Variation der Konstanten).}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Beispiel: $y' = \frac{y}{x} + x^2$, wobei $I = (0, \infty)$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $y(x) = cx$, $x \in I$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Durch Variation der Konstanten erhält man die spezielle Lösung $y(x) = x^3/2$, $x \in I$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = cx + \frac{1}{2}x^3, \quad x > 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

27.2 Bernoulli-Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0,$$

wobei $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetig sind und $\alpha \notin \{0, 1\}$ ist, heißt *Bernoullische Differentialgleichung.*

Die Bernoulli-Differentialgleichung lässt sich durch Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen:

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0$$

wird mittels $z := y^{1-\alpha}$ zu

$$z' + (1-\alpha)g(x)z + (1-\alpha)h(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann wie in 27.1 gelöst werden, und man erhält dann eine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung durch $y(x) := z(x)^{1/(1-\alpha)}$.

Zu beachten: Für nicht-ganze $\alpha < 0$ ist y^α nur für positive y erklärt, in diesem Fall ist $D = I \times (0, \infty)$. Positiven Lösungen $y(x)$ entsprechen positive Lösungen $z(x)$. Eindeutigkeit der Lösungen (in $I \times (0, \infty)$) folgt aus 27.1.

Für nicht-ganze $\alpha > 0$ ist y^α für $y \geq 0$ erklärt, und durch $y(x) = 0$ ist eine Lösung gegeben. Laufen Lösungen $z(x)$ durch Null, so kann die Eindeutigkeit der Lösung in diesen Punkten verlorengehen.

Beispiele: 1) $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^{-2/3} = 0$, wobei $I = (-1, \infty)$. Hier ist $\alpha = -\frac{2}{3}$, $g(x) = (1+x)^{-1}$ und $h(x) = 1 + x$. Die Substitution $z := y^{5/3}$ führt auf

$$z' + \frac{5}{3}\frac{z}{1+x} + \frac{5}{3}(1+x) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $z(x) = c(1+x)^{-5/3} - \frac{5}{11}(1+x)^2$. Für $z(x) > 0$ muss $c > 0$ sein. Für $c > 0$ sind Lösungen gegeben durch

$$y(x) = \left(c(1+x)^{-5/3} - \frac{5}{11}(1+x)^2\right)^{3/5}, \quad x \in (-1, (11c/5)^{3/11} - 1).$$

2) $y' = \sqrt{y}$: Hier ist $\alpha = \frac{1}{2}$, $g(x) = 0$ und $h(x) = -1$, und man kann die Differentialgleichung in $D = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ betrachten. Die Substitution $z := y^{1/2}$ führt auf

$$z' - \frac{1}{2} = 0$$

mit allgemeiner Lösung $z(x) = \frac{1}{2}x + c$. Diese ist ≥ 0 für $x \geq -2c$, also sind Lösungen gegeben durch

$$y(x) = (\frac{x}{2} + c)^2, \quad x \geq -2c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung mit Anfangswert $y(-2c) = 0$ aber auch durch $y(x) = 0$, $x \geq -2c$ gegeben. Außerdem beachte man, dass diese Lösungen links von $-2c$ nur durch 0 fortgesetzt werden können (wegen $y' \geq 0$, was aus der Differentialgleichung folgt).

Zu beachten für ganzzahlige α: Hier ist y^α für $y \neq 0$ ($\alpha < 0$) oder für alle $y \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) definiert. Es lässt sich auch ein Überblick über negative Lösungen y gewinnen, wenn man eine Vorzeichenbetrachtung durchführt ($\rightarrow$ Übungen).

27.3 Riccati-Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x), \tag{1}$$

wobei $g, h, k : I \to \mathbb{R}$ stetig sind, heißt *Ricatti-Differentialgleichung*. Für $k = 0$ auf I ist (1) eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = 2$ und man kann wie in 27.2 $z = y^{-1}$ substituieren.

Für $k \neq 0$ lassen sich Lösungen in der Regel nicht in geschlossener Form angeben. *Kennt* man jedoch bereits eine Lösung ϕ der Differentialgleichung, so lassen sich die übrigen wie folgt berechnen:

Setzt man $u = y - \phi$, so gilt

$$u' + g(x)u + h(x)(y^2 - \phi^2) = 0$$

und wegen $y^2 - \phi^2 = (y + \phi)(y - \phi) = (u + 2\phi)u$ weiter

$$u' + (g(x) + 2\phi(x)h(x))u + h(x)u^2 = 0. \tag{2}$$

Dies ist eine Bernoulli-Differentialgleichung, und die Substitution $z = u^{-1}$ (vgl. 27.2) führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' - (g(x) + 2\phi(x)h(x))z - h(x) = 0. \tag{3}$$

Die übrigen Lösungen der Ricatti-Differentialgleichung (1) erhält man also als

$$y(x) = \phi(x) + u(x) = \phi(x) + \frac{1}{z(x)},$$

wobei z die Lösungen von (3) durchläuft.

Beispiel: $y' + (2x-1)y - y^2 = 1 - x + x^2$. Hier ist $g(x) = 2x-1$, $h(x) = -1$ und $k(x) = 1 - x + x^2$. Eine spezielle Lösung ist $\phi(x) = x$, und (3) lautet hier

$$z' - \underbrace{(2x-1-2x)}_{=-1} z + 1 = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist $z(x) = ce^{-x} - 1$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Die übrigen Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind also

$$y(x) = x + \frac{1}{ce^{-x} - 1},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ für $c \leq 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln c\}$ für $c > 0$. Ende Woche 1

27.4 Exakte Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und seien $P, Q : G \to \mathbb{R}$ stetig.

Definition: Die Differentialgleichung

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

heißt *exakt in* G, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\partial_x F = P \quad \text{und} \quad \partial_y F = Q \quad \text{in } G,$$

dh wenn das Vektorfeld $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ auf G ein Potential (eine *Stammfunktion*) besitzt.

Bemerkung: Die Schreibweise bei (1) deutet an, dass man sich noch nicht entschieden hat, ob die Lösung die Gestalt $y(x)$ oder $x(y)$ oder $(x(t), y(t))$ (Parameterdarstellung) haben soll, dh ob man

$$\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y)y' &= 0 \quad \text{oder} \\ P(x,y)\frac{dx}{dy} + Q(x,y) &= 0 \quad \text{oder} \\ P(x,y)\dot{x} + Q(x,y)\dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet.

Satz 1: Ist die Differentialgleichung (1) in G exakt und ist $F : G \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so sind alle Lösungen von (1) implizit gegeben durch

$$F(x,y) = \text{const}, \tag{2}$$

dh durch die *Höhenlinien* von F.

Beweis: Integriere die Differentialgleichung in Parameterform nach t und beachte $\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = \partial_x F\dot{x} + \partial_y F\dot{y}$ (Kettenregel aus HM II, vgl. 19.13).

Mit dem Satz 2 aus 20.4 (HM II) erhalten wir

Satz 2: Ist G *einfach zusammenhängend*, sind P, Q stetig differenzierbar auf G und gilt $\partial_y P = \partial_x Q$ in G, so sind alle Lösungen von (1) implizit durch (2) gegeben, wobei $F : G \to \mathbb{R}$ ein Potential (eine Stammfunktion) zum Vektorfeld $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ auf G ist. Insbesondere ist für $(x_0, y_0) \in G$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad y(x_0) = y_0$$

implizit gegeben durch

$$F(x,y) = F(x_0, y_0). \tag{3}$$

Erinnerung: Ist G *konvex*, so ist G einfach zusammenhängend. Insbesondere sind Rechtecke $G = I \times J$ einfach zusammenhängend.

Beispiele: (1) **Trennung der Variablen** (Wiederholung): $y' = f(x)g(y)$, wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar seien. Ist $g(y) \neq 0$ auf J, so führt Division durch y auf

$$\frac{y'}{g(y)} - f(x) = 0.$$

Hier ist $P(x,y) = -f(x)$ und $Q(x,y) = \frac{1}{g(y)}$, sowie $\partial_y P = 0 = \partial_x Q$ auf $G := I \times J$. Somit ist die Differentialgleichung in G exakt. Ist A eine Stammfunktion von f und B eine Stammfunktion von $1/g$, so sind die Lösungen implizit gegeben durch

$$B(y) - A(x) = \text{const.}$$

(2) $(1 + 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$. Hier ist $P(x,y) = 1 + 2xy$, $Q(x,y) = x^2$ und $P_y = 2x = Q_x$. Also ist die Differentialgleichung in $G = \mathbb{R}^2$ exakt. Eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x,y) = x + x^2 y$, also sind alle Lösungen implizit gegeben durch

$$x + x^2 y = c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Außer den Lösungen $y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ ist auch $x(y) = 0$ eine Lösung.

(3) $\frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $P_y = Q_x$. Die Differentialgleichung ist also z.B. in $G = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ exakt. Bestimmung eines Potentials:

$$\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{y}\int \frac{dx}{(x/y)^2 + 1} = \arctan(\frac{x}{y}) + \varphi(y)$$

und
$$Q = \partial_y(\arctan(x/y) + \varphi(y)) = \frac{1}{(x/y)^2+1} \cdot \frac{-x}{y^2} + \varphi'(y)$$
führt auf $\varphi'(y) = 0$, also $\varphi(y) = 0$. Ein Potential in G ist gegeben durch $F(x,y) = \arctan(x/y)$.

Auch in $\widetilde{G} := \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ ist die Differentialgleichung exakt und $F(x,y) = \arctan(x/y)$ ein Potential.

Definiert man
$$\widetilde{F}(x,y) = \begin{cases} \arctan(x/y) & , y > 0 \\ \pi/2 & , y = 0, x > 0 \\ \arctan(x/y) + \pi & , y < 0 \end{cases},$$
so ist $\widetilde{F}$ ein Potential auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$, also ist die Differentialgleichung in D exakt. Hingegen hat $\widetilde{F}$ keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und die Differentialgleichung ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht exakt.

Bemerkung zur Auflösung von (3)**:** Ist $\partial_y F(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0$, so lässt sich (3) lokal nach y auflösen. Ist $\partial_x F(x_0, y_0) = P(x_0, y_0) \neq 0$, so lässt sich (3) lokal nach x auflösen (siehe Satz über implizit definierte Funktionen, 19.15 in HM II).

27.5 Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)

Wir betrachten
$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{1}$$
wobei $P, Q : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind und G **einfach zusammenhängend** ist.

Ist (1) nicht exakt, so kann man versuchen, (1) mit $\mu(x,y)$ (wobei $\mu \neq 0$ auf G) so zu multiplizieren, dass
$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2}$$
exakt ist. Ein solches $\mu \in C^1(G)$ heißt *integrierender Faktor* oder *Eulerscher Multiplikator*.

Beispiel: $p(x)q(y)\,dx + dy = 0$ ist i.a. nicht exakt, aber durch Multiplikation mit $\mu(x,y) = 1/q(y)$ erhält man die exakte Differentialgleichung $p(x)\,dx + (q(y))^{-1}\,dy = 0$.

Bemerkung: Die Differentialgleichung (2) ist exakt genau dann, wenn gilt
$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \quad \text{in } G. \tag{3}$$
In Spezialfällen lässt sich (3) lösen.

Beispiele: (a) $\mu = \mu(x)$ hängt nur von x ab. Dann wird (3) zu
$$\mu P_y = \mu' Q + \mu Q_x, \quad \text{dh zu} \quad \mu' = \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mu. \tag{4}$$
Dies kann man lösen, falls $\frac{P_y - Q_x}{Q} = a(x)$ nur von x abhängt.

So ist etwa

$$y\,dx + 2x\,dy = 0$$

wegen $P_y = 1 \neq 2 = Q_x$ nicht exakt, aber $\frac{P_y - Q_x}{Q} = -1/(2x)$ hängt nur von x ab. Lösung von (4) ist hier $\mu(x) = 1/\sqrt{x}$. Die Differentialgleichung

$$\frac{y}{\sqrt{x}}\,dx + 2\sqrt{x}\,dy = 0$$

ist in $G = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x,y) = 2y\sqrt{x}$. Ende Woche 2

(b) $\mu = \mu(y)$ hängt nur von y ab. Dann wird (3) zu

$$\mu' P + \mu P_y = \mu Q_x, \quad \text{dh zu} \quad \mu' = \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mu. \tag{5}$$

Dies kann man lösen, falls $\frac{Q_x - P_y}{P} = b(y)$ nur von y abhängt.

Im Beispiel in (a) ist $\frac{Q_x - P_y}{P} = 1/y$ und Lösung von (5) ist dann $\mu(y) = y$. Die Differentialgleichung

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

ist in $G = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x,y) = xy^2$.

Allgemeiner: $\mu = \rho(\varphi(x,y))$. Dann ist

$$\mu_x = (\rho' \circ \varphi)\varphi_x \quad \text{und} \quad \mu_y = (\rho' \circ \varphi)\varphi_y$$

und (3) wird zu

$$\rho' \circ \varphi = \left(\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q}\right) \rho \circ \varphi. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen, falls $\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q} = h(\varphi(x,y))$ gilt.

Beispiel: (c) $\varphi(x,y) = x+y$ und $\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = h(x+y)$ hängt nur von $x+y$ ab (beim Vergleich mit (6) beachte $\varphi_x = 1$, $\varphi_y = 1$). Dann löst man

$$\rho'(t) = h(t)\rho(t)$$

und setzt $\mu(x,y) := \rho(x+y)$. Dies ist ein integrierender Faktor.

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$\underbrace{y(1+x)}_{=P(x,y)}\,dx + \underbrace{x(1+y)}_{=Q(x,y)}\,dy = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist wegen $P_y = 1 + x \neq 1 + y = Q_x$ nicht exakt. Es gilt hier

$$\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = \frac{y - x}{y + xy - x - xy} = 1 = h(x+y)$$

für $h(t) = 1$. Die zu lösende Differentialgleichung (6) ist also $\rho' = \rho$ mit Lösung $\rho(t) = e^t$. Der Multiplikator ist $\mu(x, y) = \rho(x + y) = e^{x+y} \neq 0$. Die Differentialgleichung

$$y(1 + x)e^{x+y}\, dx + x(1 + y)e^{x+y}\, dy = 0$$

ist in $\mathbb{R}^2$ exakt. Eine Stammfunktion ist $F(x, y) = xye^{x+y}$. Lösungen sind also implizit gegeben durch $xye^{x+y} = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

27.6 Implizite Differentialgleichungen

Implizite Differentialgleichungen haben die Form

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

wobei F eine stetige Funktion von drei Variablen ist, definiert auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^3$. Gesucht ist wieder eine C^1-Funktion $y = \varphi(x)$, definiert auf einem Intervall $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$, die (1) löst, dh dass für alle $x \in \widetilde{I}$ gilt:

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G \quad \text{und} \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

(a) Geraden als Lösungen:
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x, ax + b, a) = 0, \quad x \in I,$$

so ist $\varphi(x) = ax + b$, $x \in I$, eine Lösung.

Beispiel Clairaut-Differentialgleichung $y = xy' + g(y')$, wobei $g : J \to \mathbb{R}$:
Für jedes $a \in J$ ist hier

$$y = \varphi(x) = ax + g(a), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Lösung.

Beispiel d'Alembert-Gleichung $y = xf(y') + g(y')$, wobei $f, g : J \to \mathbb{R}$:
Hier ist

$$y = \varphi(x) = ax + g(a), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Lösung, **falls** $f(a) = a$ gilt, dh falls a ein **Fixpunkt** von f ist.

(b) Weitere Lösungen erhält man manchmal wie folgt:
Suche Funktionen $\psi(t)$, $\chi(t)$ für $t \in I$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit

$$F(\psi(t), \chi(t), t) = 0, \quad t \in I, \tag{2}$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t), \quad t \in I. \tag{3}$$

(Hierbei ist t ein Parameter, der für die Ableitung y' steht und $\psi(t) = x$, $\chi(t) = y$, was wegen

$$t = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{\chi}}{\dot{\psi}}$$

zu (3) führt.) Setze dann $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$ für $t \in I$. Dies ist eine Parameterdarstellung einer Lösung von (1), falls $\dot{\psi} \neq 0$ auf I gilt (das bedeutet, dass man lokal $t = \psi^{-1}(x)$ schreiben kann).
Denn wegen $y(x) = \chi(\psi^{-1}(x))$ gilt dann

$$y'(x) = \dot{\chi}(\psi^{-1}(x)) \cdot (\psi^{-1})'(x) = \dot{\chi}(\psi^{-1}(x)) \frac{1}{\dot{\psi}(\psi^{-1}(x))} \overset{(3)}{=} \psi^{-1}(x) = t,$$

und wegen (2) ist y dann Lösung von (1).

Beispiel d'Alembert-Gleichung $y = xf(y') + g(y')$: Hier ist etwa

$$F(x, y, y') = xf(y') + g(y') - y$$

und somit

$$\psi(t)f(t) + g(t) = \chi(t), \tag{$\tilde{2}$}$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t). \tag{$\tilde{3}$}$$

Wir erhalten daraus

$$t\dot{\psi}(t) \overset{(\tilde{3})}{=} \dot{\chi}(t) \overset{(\tilde{2})}{=} \dot{\psi}(t)f(t) + \psi(t)\dot{f}(t) + \dot{g}(t)$$

und weiter die lineare Differentialgleichung (für ψ)

$$\dot{\psi}(t)(f(t) - t) + \psi(t)\dot{f}(t) + \dot{g}(t) = 0 \tag{4}$$

Hieraus bestimme man ψ und anschließend χ aus $(\tilde{2})$.

Spezialfall: Für die **Clairaut-Differentialgleichung** ist $f(t) = t$, aus (4) folgt $\psi(t) = -\dot{g}(t)$ und weiter

$$x = \psi(t) = -\dot{g}(t), \qquad y = \chi(t) = -t\dot{g}(t) + g(t).$$

Konkretes Beispiel einer d'Alembert-Gleichung: $y = x(y')^2 + y'$. Hier ist $f(t) = t^2$ und $g(t) = t$.

Geraden: Die Fixpunktgleichung $f(a) = a$ hat nur die Lösungen $a = 0$ und $a = 1$. Wegen $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ führt dies auf die Lösungen

$$y = \varphi(x) = 0 \quad \text{und} \quad y = \varphi(x) = x + 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Weitere Lösungen: Gleichung (4) lautet hier

$$\dot{\psi}(t)(t^2 - t) + 2t\psi(t) + 1 = 0,$$

also für $t \notin \{0, 1\}$:

$$\dot{\psi}(t) + \frac{2}{t-1}\psi(t) = \frac{1}{t - t^2}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist hier

$$\psi(t) = \frac{c}{(t-1)^2}.$$

Durch Variation der Konstanten erhält man eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\psi(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \int \frac{(t-1)^2}{t - t^2}\, dt = \frac{-1}{(t-1)^2} \int \Big(1 - \frac{1}{t}\Big)\, dt = -\frac{t}{(t-1)^2} + \frac{\ln|t|}{(t-1)^2}.$$

Somit sind Lösungen in Parameterform gegeben durch

$$x = \psi(t) = \frac{c}{(t-1)^2} - \frac{t}{(t-1)^2} + \frac{\ln|t|}{(t-1)^2}, \quad y = \chi(t) \overset{(\tilde{2})}{=} t^2\psi(t) + t, \quad t \notin \{0, 1\},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

(c) Implizite Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Wir betrachten hier die Differentialgleichung

$$\Phi(y, y', y'') = 0, \tag{5}$$

wobei $\Phi : G \to \mathbb{R}$ stetig ist und $G \subset \mathbb{R}^3$. Eine *Lösung* ist eine C^2-Funktion $\varphi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$, wobei $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit Ende Woche 3

$$(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \in G \quad \text{und} \quad \Phi(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \quad \text{für alle } x \in \widetilde{I}.$$

Schritt 1: Berechne $p(t)$ aus

$$\Phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0. \tag{6}$$

Man setzt also $t = y$ und $p = y'$. Beachte dabei

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \dot{p}p.$$

Die Differentialgleichung (6) ist ein Problem der Form (1).

Schritt 2: Berechne $y(x)$ aus

$$y'(x) = p(y(x)) \qquad \text{(Trennung der Variablen)}. \tag{7}$$

Beispiel: $y'' = yy' + (y')^2$ mit $y(1) = 0$ und $y'(1) = -1$. An den Anfangswerten sieht man schon, dass man gleich (6) mit der Anfangsbedingung $p(0) = -1$ lösen muss.

In Schritt 1 ist $\Phi(t, p, z) = tp + p^2 - z$, und man muss $z = p\dot{p}$ setzen. Die Gleichung (6) wird zu

$$\widetilde{F}(t, p, \dot{p}) = tp + p^2 - p\dot{p} = 0.$$

Wir dividieren durch p und erhalten

$$F(t, p, \dot{p}) = t + p - \dot{p} = 0$$

als Gleichung der Form (1). Die Anfangsbedingung ist $p(0) = -1$, also ist die Lösung $p(t) = -1 - t$. Somit lautet (7) hier

$$y'(x) = -1 - y(x).$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ führt auf die Lösung $y(x) = -1 + e^{1-x}$.

27.7 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in I, \tag{1}$$

und erinnern zunächst an die aus 17.5 (HM II) bekannten Tatsachen.

Satz: Ist $x_0 \in I$ und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so hat das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} y'' + p(x)y' + q(x)y &=& f(x) \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) &=& \beta \end{array}\right\} \tag{2}$$

genau eine Lösung auf I.

Die allgemeine Lösung von (1) erhält man durch Addition einer speziellen (*partikulären*) Lösung der *inhomogenen* Gleichung (1) und der allgemeinen Lösung der zugehörigen *homogenen* Gleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{3}$$

Bemerkung: Der Lösungsraum der homogenen Gleichung (3)

$$\mathscr{L}_0 := \{y : I \to \mathbb{R} : \; y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\}$$

ist ein reeller Vektorraum der Dimension 2.

Eine Basis von $\mathscr{L}_0$ heißt *Fundamentalsystem* für (3) auf I. Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem, dh eine Basis von $\mathscr{L}_0$, so erhält man **jede** Lösung von (3) durch *Linearkombination* $\lambda y_1 + \mu y_2$ für geeignete $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Wronski-Determinante: Sind $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so heißt

$$w : I \to \mathbb{R}, \quad w(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

die *Wronski-Determinante* des Systems y_1, y_2.

Bemerkung: Sind $y_1, y_2 \in \mathscr{L}_0$, dh sind y_1, y_2 Lösungen von (3), so gilt für die Wronski-Determinante w von y_1, y_2:

$$w'(x) = -p(x)w(x), \quad x \in I,$$

und folglich

$$w(x) = w(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}, \quad x \in I,$$

für jedes $x_0 \in I$. Also ist insbesondere **entweder** $w(x) = 0$ für alle $x \in I$ **oder** $w(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Folgerung: $y_1, y_2 \in \mathscr{L}_0$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem von (3), wenn es ein $x_0 \in I$ gibt mit $w(x_0) \neq 0$, wobei w die Wronski-Determinante von y_1, y_2 ist.

Beispiel 1): $y'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = \sin x$: Hier löst $y_P(x) = 1$ die inhomogene Gleichung. Die homogene Gleichung

$$y'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = 0$$

hat $y_1(x) = e^{\sin x}$ als Lösung.

Wie erhält man eine von y_1 linear unabhängige Lösung y_2 der homogenen Gleichung?

Reduktion der Ordnung (Verfahren von d'Alembert): Sei $y_1 \neq 0$ eine Lösung von (3) auf I. Der Ansatz $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ für eine Lösung von (1) führt auf

$$v'' + v'\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right) = \frac{f(x)}{y_1(x)}. \tag{4}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für v', die sich lösen lässt. Jede Lösung y von (1) hat die Gestalt $y = vy_1$, wobei v Lösung von (4) ist.

Insbesondere führt für $f = 0$ eine Lösung v von (4) mit $v' \neq 0$ auf eine von y_1 linear unabhängige Lösung y_2 von (3), so dass y_1, y_2 dann ein Fundamentalsystem von (3) bilden.

Fortsetzung des Beispiels 1): Die Gleichung (4) (mit $f = 0$) lautet hier

$$v'' + v' \underbrace{\left(\frac{2\cos x\, e^{\sin x}}{e^{\sin x}} - \cos x\right)}_{=\cos x} = 0,$$

dh $v'(x) = ce^{-\sin x}$ und $v(x) = c\int e^{-\sin x}\,dx + d$, also etwa (mit festem $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$y_2(x) = e^{\sin x} \int_{x_0}^{x} e^{-\sin t}\,dt$$

als zweite Lösung der homogenen Gleichung im Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist dann gegeben durch

$$y(x) = 1 + c_1 e^{\sin x} + c_2 e^{\sin x} \int_{x_0}^{x} e^{-\sin t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Beispiel 2): $y'' + (1 - x^2)y = 0$. Setzt man $y = e^{g(x)}$ an, so erhält man

$$y'' = (e^{g(x)} g'(x))' = g'' e^{g(x)} + (g')^2 e^{g(x)} = (g'' + (g')^2) y,$$

dh $g'' + (g')^2 \stackrel{!}{=} x^2 - 1$ mit Lösung $g(x) = -x^2/2$. Somit ist $y_1(x) = e^{-x^2/2}$ eine Lösung auf $\mathbb{R}$.

Gleichung (4) lautet hier

$$v'' + v' \underbrace{\left(\frac{-2xe^{-x^2/2}}{e^{-x^2/2}} + 0 \right)}_{=-2x} = 0,$$

dh $v'(x) = ce^{x^2}$, und die allgemeine Lösung lautet (mit festem $x_0 \in \mathbb{R}$) somit:

$$y(x) = c_1 e^{-x^2/2} + c_2 e^{-x^2/2} \int_{x_0}^{x} e^{t^2}\, dt, x \in \mathbb{R},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

27.8 Die Eulersche Differentialgleichung

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und seien $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Eine Differentialgleichung der Form

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

heißt *Eulersche Differentialgleichung*. Da mit $y(x)$ auch $y(-x)$ eine Lösung ist, kann man sich auf $x > 0$ beschränken und substituiert

$$x = e^t, \quad u(t) = y(e^t), \quad y(x) = u(\ln x).$$

Wegen

$$\frac{du}{dt} = y'x, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = y'x + y''x^2, \quad \frac{d^3u}{dt^3} = y'x + 3y''x^2 + y'''x^3 \quad \text{etc.}$$

führt dies auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für u:

$$\frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u = 0, \tag{2}$$

welche wie in 17.6 (HM II) zu gelöst werden kann.

Ende
Woche 4

Der Ansatz $u = e^{\lambda t}$ für eine Lösung von (2) entspricht dabei dem Ansatz $y = x^\lambda$ für eine Lösung von (1).

Beispiele: 1) $x^2y'' - 3xy' + 7y = 0$. Die beschriebene Substitution $u(t) = y(e^t)$ führt auf

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 7u = 0.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 7$ hat die Nullstellen $\lambda = 2 \pm i\sqrt{3}$. Aus den beiden linear unabhängigen Lösungen

$$u_1(t) = e^{2t}\sin(\sqrt{3}t), \quad u_2(t) = e^{2t}\cos(\sqrt{3}t)$$

erhält man als Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung:

$$y_1(x) = x^2\sin(\sqrt{3}\ln x), \quad y_2(x) = x^2\cos(\sqrt{3}\ln x), \quad x > 0.$$

2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Die beschriebene Substitution führt auf $\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 4u = 0$ mit scharakteristischem Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Hier ist $\lambda = 2$ doppelte Nullstelle, und wir erhalten als Fundamentalsystem

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2\ln x, \quad x > 0.$$

27.9 Potenzreihenansatz

Für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

mit Koeffizienten $p(x) = \sum_{j=0}^\infty p_jx^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^\infty q_jx^j$, die für $|x| < R$ konvergieren, führt ein Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{j=0}^\infty c_jx^j$$

und Koeffizientenvergleich auf (lineare) Rekursionsformeln für die Koeffizienten c_j. Die Potenzreihe für y konvergiert dann auch für $|x| < R$ (ohne Beweis).

Beispiel: $y'' - x^2y = 0$. Der Ansatz $y(x) = \sum_{j=0}^\infty c_jx^j$ führt auf

$$x^2y(x) = c_0x^2 + c_1x^3 + c_2x^4 + \dots, \quad y''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3x + 4\cdot 3\cdot c_4x^2 + \dots$$

Hier sind c_0, c_1 frei wählbar (beachte $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$), und wir erhalten:

$$2\cdot 1\cdot c_2 = 0,\ 3\cdot 2\cdot c_3 = 0\ ,4\cdot 3\cdot c_4 = c_0,\ 5\cdot 4\cdot c_5 = c_1,\ \text{etc.}$$

Also ist $c_2 = c_3 = 0$ und

$$c_{k+4} = \frac{c_k}{(k+4)(k+3)} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Die Lösung y von $y'' - x^2 y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ist also

$$y(x) = x + \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} + \ldots,$$

denn die Anfangsbedingungen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, führen zu $c_4 = c_8 = \ldots = 0$ und $c_5 = \frac{1}{5 \cdot 4}$, $c_9 = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$, etc.

Bemerkung: Allgemeiner kann man einen Potenzreihenansatz natürlich auch für inhomogene Gleichungen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

durchführen, wenn $p(x), q(x), f(x)$ auf $|x| < R$ durch konvergente Potenzreihen gegeben sind.

27.10 Abgewandelter Potenzreihenansatz

In Verallgemeinerung der Eulerschen Differentialgleichung in 27.8 betrachten wir

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

wobei $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen seien (wir betrachten wie vorher auch nur $p_j, q_j \in \mathbb{R}$). Hier macht man den Ansatz

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

wobei die Koeffizienten c_k und ρ zu berechnen sind. Es ist

$$\begin{aligned}
x^2 y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k-1+\rho) x^{k+\rho}, \\
xp(x)y' &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\rho) x^{j+\rho} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j} c_j (j+\rho) \Big) x^{k+\rho}, \\
q(x)y &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\rho} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j} c_j \Big) x^{k+\rho}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für $k = 0$ führt auf

$$(\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0) c_0 = 0,$$

und die *determinierende Gleichung*

$$\underbrace{\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0}_{=:f(\rho)}=0. \tag{2}$$

für ρ. Für $k=1,2,3,\ldots$ erhalten wir

$$(\underbrace{(\rho+k)(\rho+k-1)+p_0(\rho+k)+q_0}_{=f(\rho+k)})c_k=-\sum_{j=0}^{k-1}(p_{k-j}(\rho+j)+q_{k-j})c_j \tag{3}$$

als rekursive Gleichung für die Koeffizienten.

Satz: Es gelte

$$f(\rho)=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2) \quad \text{mit } \rho_1\geq\rho_2, \text{ falls beide reell sind}$$

(ρ_1,ρ_2 sind die Nullstellen der determinierenden Gleichung).

Falls $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$, so gibt es für $0<|x|<R$ ein Fundamentalsystem von (1) der Gestalt

$$y_1(x)=|x|^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k, \quad y_2(x)=A\ln|x|y_1(x)+|x|^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^k,$$

mit $A\in\{0,1\}$, wobei

$$\begin{cases} A=0, c_0\neq 0, d_0\neq 0 & \text{, falls } \rho_1-\rho_2\notin\mathbb{N}_0 \\ A=1, c_0\neq 0, d_0=0 & \text{, falls } \rho_1=\rho_2 \\ A\in\{0,1\}, c_0\neq 0, d_0\neq 0 & \text{, falls } \rho_1-\rho_2\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Falls $\rho_1\notin\mathbb{R}$ ist, so ist $\rho_2=\overline{\rho_1}$ und es gibt ein Fundamentalsystem von (1) der Gestalt

$$y_1(x)=\operatorname{Re}(|x|^{\rho_1}v_1(x)), \quad y_2(x)=\operatorname{Im}(|x|^{\rho_1}v_1(x))$$

mit $v_1(x)$ als für $|x|<R$ konvergenter Potenzreihe und $v_1(0)\neq 0$.

[Wir verweisen auf → Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Abschnitt 27.]

Bemerkung: Für den Fall komplexer Exponenten $\rho=\sigma+i\tau$ mit $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$ beachte man im Vergleich mit 27.8, dass für $x>0$ gilt:

$$x^\rho=e^{\rho\ln x}=e^{\sigma\ln x}e^{i\tau\ln x}=x^\sigma(\cos(\tau\ln x)+i\sin(\tau\ln x))=x^\sigma\cos(\tau\ln x)+ix^\sigma\sin(\tau\ln x).$$

Beispiel: $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ (Besselsche Differentialgleichung der Ordnung 1/2). Der Ansatz $y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^{j+\rho}$ führt auf

$$\left(\rho^2-\frac{1}{4}\right)c_0x^\rho+\left((\rho+1)^2-\frac{1}{4}\right)c_1x^{\rho+1}+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\left((\rho+j)^2-\frac{1}{4}\right)c_j+c_{j-2}\right)x^{\rho+j}=0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung

$$\rho^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{mit Nullstellen } \rho_1 = \tfrac{1}{2},\ \rho_2 = -\tfrac{1}{2}$$

und

$$\left((\rho+1)^2 - \frac{1}{4}\right) c_1 = 0, \qquad \left((\rho+j)^2 - \frac{1}{4}\right) c_j = -c_{j-2}, j \geq 2.$$

Für $\rho_1 = \frac{1}{2}$ erhalten wir $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = 0$ und

$$c_j = -\frac{c_{j-2}}{j(j+1)}, \quad j = 2, 4, 6, \ldots,$$

also

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k+1)} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k+1)!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Mit $c_0 = 1$ ist schließlich

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = \frac{1}{x^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{1}{x}} \sin x, \quad x > 0.$$

Wir sind im Fall $\rho_1 - \rho_2 = 1 \in \mathbb{N}$ des Satzes und der Ansatz

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j$$

führt auf ähnliche Weise wie oben zu $y_2(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \cos x$. Hier hat man also $A = 0$.

Bemerkung: Der allgemeinere Fall

$$x^2 r(x) y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0$$

mit $p(x)$, $q(x)$ wie oben und $r(x) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j$ und $r_0 \neq 0$ (!) lässt sich durch Multiplikation mit $\frac{1}{r(x)}$ auf (1) zurückführen. Auch

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) \widetilde{p}(x) y' + \widetilde{q}(x) y = 0$$

mit für $|x - x_0| < R$ konvergenten Potenzreihen $\widetilde{p}(x)$ und $\widetilde{q}(x)$ führt durch Translation auf (1).

Ende Woche 6

28 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

28.1 Das Problem

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir schreiben Punkte aus D als $(x, \vec{y})$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und betrachten

$$\vec{y}\,' = F(x, \vec{y}) \tag{1}$$

Eine *Lösung* von (1) ist eine stetig differenzierbare Funktion $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit

$$(x, \vec{y}(x)) \in D \qquad \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wir erinnern dabei an $\vec{y}\,'(x) = \frac{d}{dx} y(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$.

Entsprechend betrachten wir Anfangswertprobleme, wobei man für gegebene $(x_0, \vec{y}_0) \in D$ Lösungen $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ von (1) mit der Bedingung $x_0 \in I$ und $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ sucht.

Beispiele: 1) Das Lotka-Volterrasche Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u - \beta uv \\ v' &= -\gamma v + \delta uv \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ beschreibt das Wachstum einer Räuberpopulation v (z.B. Füchse), die sich von einer Beutepopulation u (z.B. Hasen) ernährt: ohne Räuber vermehrt sich u exponentiell, während v ohne Beute exponentiell ausstirbt. Begegnungen von Räuber und Beute (proportional zum Produkt uv) führen zu Wachstum bei v und zur Abnahme bei u. Setzt man $\vec{y} := \binom{u}{v}$, also $y_1 = u$ und $y_2 = v$, so erhält man (1) für

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -\alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \\ -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

2) Man kann explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form (1) umschreiben. Sei etwa $I = [0, T]$ und seien $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x), \quad x \in I \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ist via $u := y$, $v := y'$ äquivalent zum Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcllrcl} u' & = & v & , & u(0) & = & \alpha \\ v' & = & -p(x)v - q(x)u + f(x) & , & v(0) & = & \beta. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Setzt man $F(x,u,v) := \begin{pmatrix} v \\ -a(x)v - b(x)u + f(x) \end{pmatrix}$, so ist $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, und (3) ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = F(x,u,v), \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

28.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Seien D und F wie in 28.1, sowie $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Sei F bzgl. der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in D stetig partiell differenzierbar. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{y}\,' & = & F(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) & = & \vec{y}_0 \end{array}\right\} \tag{AWP}$$

eindeutig lösbar, dh

(i) Es gibt eine Lösung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ von (AWP).
(ii) Sind $\vec{y} : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\vec{z} : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von (AWP), so stimmen $\vec{y}$ und $\vec{z}$ auf $I_1 \cap I_2$ überein.

Zusatz: Es gibt eine eindeutige Lösung $y : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ mit *maximalem* Existenzintervall $I_{\max}$. Diese *maximale* Lösung verläuft "von Rand zu Rand", was im Falle $D = [x_0, a) \times \mathbb{R}^n$ bedeutet, dass $\sup I_{\max} = a$ (globale Existenz) oder $\lim_{x \to \sup I_{\max}} \|\vec{y}(x)\| = \infty$ (Blow-up in endlicher Zeit).

Beispiele: 1) Das Lotka-Volterrasche Räuber-Beute-Modell hat für alle Anfangswerte $\binom{u(0)}{v(0)} \in \mathbb{R}^2$ eine lokal existierende, eindeutige Lösung $\binom{u(x)}{v(x)}$. Man kann zeigen, dass für $u(0), v(0) \geq 0$ die Lösung global existiert und $u(x), v(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt.

2) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) in 28.1 hat für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine lokal existierende, eindeutige Lösung $y(x)$. Diese Lösung existiert auf ganz $[0, T]$.

3) Das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar. Hier ist $n = 1$ und $F(y) = \sqrt{|y|}$ ist in 0 nicht differenzierbar.

28.3 Bemerkungen zum Beweis (im wesentlichen für $n = 1$):

Schritt 1: Ist $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, so gilt

$\vec{y}$ ist stetig differenzierbar und Lösung von (AWP) genau dann, wenn $\vec{y}$ stetig ist und

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \vec{y}(t))\, dt, \quad x \in I. \tag{FP}$$

Diese Gleichung ist eine *Fixpunktgleichung*, zu deren Lösung man *Fixpunktsätze* verwenden kann (s.u.).

Schritt 2: Für jedes beschränkte, abgeschlossene Rechteck $I \times J \subseteq D$ gibt es eine Konstante $L > 0$ so, dass

$$|F(x,y) - F(x,\widetilde{y})| \leq L|y - \widetilde{y}|, \quad \text{für alle } x \in I,\ y, \widetilde{y} \in J.$$

(Man sagt, dass F lokal einer *Lipschitzbedingung* bzgl. der zweiten Komponente genügt).

Schritt 3 (Eindeutigkeit): Wir betrachten $I = [0, a]$, $J = [-b, b]$ und erinnern an das

Gronwall-Lemma (17.9): Sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gebe $\alpha \geq 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$h(x) \leq \beta + \alpha \int_0^x h(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Dann gilt $h(x) \leq \beta e^{\alpha x}$ für alle $x \in I$.

Seien nun $y, z : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (FP). Das Lemma wird angewendet auf die stetige Funktion $h(x) = |y(x) - z(x)|$. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 \leq h(x) &= \left| \int_0^x F(t, y(t)) - F(t, z(t))\, dt \right| \\ &\leq \int_0^x |F(t, y(t)) - F(t, z(t))|\, dt \\ &\leq L \int_0^x \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{=h(t)}\, dt, \end{aligned}$$

also $\beta = 0$ und $\alpha = L$, und erhalten $h \leq 0$ auf I.

Schritt 4: Die in Schritt 3 gezeigte Abschätzung ermöglicht die Anwendung des folgenden Satzes zur Lösung der Fixpunktgleichung (FP).

28.4 Banachscher Fixpunktsatz: Sei $B \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes, dh eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$, in dem jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Seien $T : B \to B$ und $0 \leq \alpha < 1$ so, dass

$$\|T(x) - T(\widetilde{x})\| \leq \alpha \|x - \widetilde{x}\| \quad \text{für alle } x, \widetilde{x} \in B \tag{1}$$

gilt. Dann hat T genau einen Fixpunkt $x^* \in B$, und für jedes $x_0 \in B$ konvergiert die durch $x_k := T(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, rekursiv definierte Folge (x_k) gegen x^*.

Bemerkung: Der Satz gibt **Existenz** und **Eindeutigkeit** eines Fixpunktes. Dieser Fixpunkt kann durch *Fixpunktiteration* gefunden werden. Einfache Beispiele für Banachräume X sind $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{R}^n$.

Anwendung: Zur Lösung von (FP) betrachten wir $X := C[0,a]$ mit der Supremumsnorm $\|g\| := \sup\{|g(x)| : x \in [0,a]\}$ und definieren

$$(Tg)(x) = y_0 + \int_0^x F(t, g(t))\, dt, \quad x \in [0,a].$$

Die in 28.3 Schritt 3 gezeigte Abschätzung zeigt

$$|(Tg)(x) - (T\widetilde{g})(x)| \leq L \int_0^x |g(t) - \widetilde{g}(t)|\, dt \leq Lx\|g - \widetilde{g}\|, \quad x \in [0,a],$$

also

$$\|T(g) - T(\widetilde{g})\| \leq La\|g - \widetilde{g}\|.$$

Für $La < 1$ kann man den Satz anwenden, wenn B geeignet gewählt wird (man hat ja diese Abschätzung nur für $g, \widetilde{g}$ mit $\|g\|, \|\widetilde{g}\| \leq b$).

Beispiel (zur Fixpunktiteration): Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

auf $I = [0, \infty)$ mit Anfangswert $\binom{u(0)}{v(0)} = \binom{\alpha}{\beta}$. Die Iteration beginnen wir mit $\binom{u_0}{v_0}(x) = \binom{\alpha}{\beta}$. Man zeigt leicht, dass für $k \geq 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \frac{x^3}{3!} + \ldots + \begin{cases} \binom{\alpha}{\beta} \frac{x^k}{k!} & , k \text{ gerade} \\ \binom{\beta}{\alpha} \frac{x^k}{k!} & , k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \binom{u_k}{v_k}(x)$ existiert für jedes x und ist gleich

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \cosh x + \beta \sinh x \\ \beta \cosh x + \alpha \sinh x \end{pmatrix}.$$

Das ist auch die Lösung des Differentialgleichungssystems. Ende Woche 7

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes. Eindeutigkeit: Sind $x^*, \widetilde{x}^* \in B$ Fixpunkte von T, so folgt wegen (2):

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| = \|T(x^*) - T(\widetilde{x}^*)\| \leq \alpha\|x^* - \widetilde{x}^*\|.$$

Wegen $0 \leq \alpha < 1$ ist also $\|x^* - \widetilde{x}^*\| = 0$, dh $x^* = \widetilde{x}^*$.

Existenz: Sei $x_0 \in B$ und (x_k) die zugehörige Iterationsfolge. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k), \tag{2}$$

und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt nach (2):

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\| \leq \ldots \leq \alpha^k \|x_1 - x_0\|.$$

Wegen $\alpha \in [0,1)$ gilt somit $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\| < \infty$. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe, und nach (2) konvergiert dann auch die Folge (x_n) gegen ein x^*. Da T nach (2) stetig ist, folgt

$$T(x^*) = T(\lim_n x_n) = \lim_n T(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

dh x^* ist Fixpunkt von T.

Weitere Anwendung (Taschenrechner): $X := \mathbb{R}$, $B := [\cos 1, 1]$, $T(x) = \cos x$. Es gilt $T : B \to B$ und nach Hauptsatz

$$|T(x) - T(\widetilde{x})| = |\cos(x) - \cos(\widetilde{x})| \leq \underbrace{\sin 1}_{=:\alpha} |x - \widetilde{x}|$$

für alle $x, \widetilde{x} \in B$. Also besitzt $T = \cos$ genau einen Fixpunkt in B, den man als Grenzwert einer Fixpunktiteration erhält (mit beliebigem Startwert in B). Man kann sogar mit beliebigem $x_0 \in [0, \pi/2]$ starten, da $\cos^2([0, \pi/2]) = [\cos 1, 1]$ ist.

28.5 Existenzsatz von Peano

Seien D und F wie in 28.1 und sei $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Dann hat das Anfangswertproblem (AWP) eine Lösung, und es gibt eine maximale (dh auf kein größeres Intervall fortsetzbare) Lösung $\vec{y} : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ von (AWP), die "von Rand zu Rand verläuft".

Bemerkung: Lösungen des Anfangswertproblems (AWP) sind unter diesen Voraussetzungen i.a. nicht eindeutig. Insbesondere müssen auch die Existenzintervalle maximaler Lösungen zum selben Anfangswert nicht übereinstimmen.

Zusatz/Nachtrag zu 28.2 und 28.5: Ist $D = I \times \mathbb{R}^n$ und gibt es $C \geq 0$ mit

$$\|F(x, \vec{y})\| \leq C(1 + \|\vec{y}\|) \quad \text{für alle } \vec{y} \in \mathbb{R}^n,$$

so existieren die maximalen Lösungen auf I.

29 Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir bezeichnen hier die unabhängige Variable nicht mit x, sondern mit t.

29.1 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig (letzteres bedeutet, dass in der Darstellung $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1}^n$ alle Funktionen $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind). Ist $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\vec{\phi} : I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wende Satz 28.2 (und Nachtrag!) an auf $D = I \times \mathbb{R}^n$ und $F(t, \vec{y}) = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ und beachte $\frac{\partial}{\partial \vec{y}} F(t, \vec{y}) = A(t)$.

Struktur der Lösungen: Für Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I. \tag{2}$$

gelten die uns schon von anderen linearen Differentialgleichungen vertrauten Eigenschaften:

Die **allgemeine** Lösung von (2) erhält man durch Addition einer **speziellen** (*partikulären*) Lösung des *inhomogenen* Systems (2) und der **allgemeinen** Lösung des zugehörigen *homogenen* Systems

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}, \quad t \in I. \tag{3}$$

Bemerkung: Der Lösungsraum des homogenen Systems (3)

$$\mathscr{L}_0 := \{\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n : \ \vec{y}\,' = A(t)\vec{y}, \ t \in I\}$$

ist ein reeller Vektorraum der Dimension n.

Eine Basis $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von $\mathscr{L}_0$ heißt *Fundamentalsystem* für (3) auf I. Ist $\vec{\phi}_1, \ldots \vec{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem, dh eine Basis von $\mathscr{L}_0$, so erhält man **jede** Lösung von (3) durch eine *Linearkombination*

$$c_1\vec{\phi}_1 + c_2\vec{\phi}_2 + \ldots + c_n\vec{\phi}_n$$

für geeignete $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Wronski-Determinante: Für $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n \in \mathscr{L}_0$ heißt

$$w : I \to \mathbb{R}, \quad w(t) := \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

die *Wronski-Determinante* des Systems $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$. Es sind äquivalent:

- die Funktionen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ bilden ein Fundamentalsystem;
- es ist $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$;
- es ist $w(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$.

Bilden $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem von (3), so bezeichnen wir auch

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

als Fundamentalsystem. Beachte, dass $\Phi(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist (wegen $\det \Phi(t) = w(t) \neq 0$ für $t \in I$). Außerdem gilt

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \in I,$$

und für $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + \ldots + c_n\vec{\phi}_n(t) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi(t)\vec{c}, \quad t \in I,$$

dh man erhält alle Lösungen von (3) durch Multiplikation der Funktion $\Phi(t)$ mit festen Vektoren $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Variation der Konstanten: Ist $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem für (3) auf I, so macht man für eine Lösung $\vec{y}(t)$ von (2) den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c}(t), \quad t \in I,$$

und erhält

$$A(t)\Phi(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t) \stackrel{!}{=} \vec{y}\,'(t) = A(t)\Phi(t)\vec{c}(t) + \Phi(t)\vec{c}\,'(t),$$

also

$$\Phi(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{c}\,'(t) = \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t).$$

Die eindeutige Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

Man vergleiche dies mit der Formel aus 27.1.

Bemerkung: Die Aussagen gelten entsprechend, wenn $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\vec{b} : I \to \mathbb{C}^n$ stetig sind. In diesem Fall gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$, und der Lösungsraum $\mathscr{L}_0$ des homogenen Systems ist ein *komplexer* Vektorraum der Dimension n.

29.2 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und wollen ein Fundamentalsystem bestimmen.

Grundlegende Beobachtung: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist durch

$$\vec{\phi}(t) := e^{\lambda t}\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Lösung von (1) gegeben. Ende Woche 8

Folgerung: Gibt es eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so ist durch

$$\vec{\phi}_j(t) := e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

ein Fundamentalsystem $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von (1) gegeben.

Bemerkung (Erinnerung): Es gibt genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von A, wenn A diagonalisierbar ist, dh genau dann, wenn für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Das ist z.B. immer der Fall, wenn A n **verschiedene** Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hat.

Beispiel: Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(\lambda - 1)^2.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 wird aufgespannt von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ein Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_3(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reelle Matrizen mit nicht-reellen Eigenwerten: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komplex diagonalisierbar und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$. Die linear unabhängigen komplexwertigen Lösungen $e^{\lambda t}\vec{v}$ und $e^{\overline{\lambda}t}\overline{\vec{v}}$ im Fundamentalsystem ersetze man durch die linear unabhängigen reellwertigen Lösungen

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right), \quad \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right).$$

Beispiel: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\pm i$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$, und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

29.3 Fundamentalsysteme für nicht-diagonalisierbare Matrizen

Wir betrachten weiter das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{H}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nicht diagonalisierbar ist.

Man führe das folgende Verfahren für jeden Eigenwert von A durch:

> Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit m (dh λ_0 ist m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$).
>
> Man bestimme eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des *Hauptraumes* von A zum Eigenwert λ_0, dh eine Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I)^m$ (selbst wenn der Eigenraum $\operatorname{Kern}(A - \lambda I)$ von A zum Eigenwert λ eine Dimension $< m$ hat, hat der entsprechende Hauptraum immer die Dimension m). Dazu bestimme man zunächst eine Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I)$, erweitere diese zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I)^2$ usw. Zweckmäßigerweise bestimmt man dabei in jedem Schritt Vektoren $\vec{w}$ mit
>
> $$(A - \lambda_0 I)\vec{w} = \vec{v},$$

wobei $\vec{v}$ aus dem Spann der bisher gefundenen Vektoren ist (und $\vec{v} = 0$ im ersten Schritt).

Dann sind $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$, gegeben durch

$$\vec{\phi}_j(t) = e^{\lambda_0 t}(\vec{v}_j + t(A - \lambda_0 I)\vec{v}_j + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_0 I)^2 \vec{v}_j + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda_0 I)^{m-1}\vec{v}_j$$

für $j = 1, 2, \ldots, m$, linear unabhängige Lösungen von (H).

Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist, beachte man folgendes:

Ist in der obigen Situation $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so bestimmt man eine reelle Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ des Hauptraumes und erhält so reellwertige Funktionen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$.

Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist auch $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit m. In diesem Fall erhält man $2m$ linear unabhängige reellwertige Lösungen von (H) durch

$$\mathrm{Re}\,\vec{\phi}_1,\ \mathrm{Re}\,\vec{\phi}_2, \ldots,\ \mathrm{Re}\,\vec{\phi}_m,\ \mathrm{Im}\,\vec{\phi}_1,\ \mathrm{Im}\,\vec{\phi}_2, \ldots,\ \mathrm{Im}\,\vec{\phi}_m.$$

Der Eigenwert $\overline{\lambda_0}$ wird in dem Verfahren dann nicht mehr berücksichtigt!

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2.

Weiter gilt

$$\mathrm{Kern}\,(A - I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \mathrm{Kern}\,(A - I)^2 = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Also ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad ,\vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad ,\vec{\phi}_3(t) = \Big[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big] e^t.$$

29.4 Asymptotisches Verhalten

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wir interessieren uns für das Verhalten von Lösungen von (H) für $t \to \infty$. Aus der Gestalt der Funktionen im Fundamentalsystem aus 29.3 erhalten wir den

Satz: (1) Alle Lösungen von (H) konvergieren gegen Null für $t \to \infty$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.

(2) Alle Lösungen von (H) bleiben für $t \to \infty$ beschränkt genau dann, wenn $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt und wenn für jeden Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

29.5 Die Matrixexponentialfunktion

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\exp(tA) := e^{tA} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l}{l!}.$$

Die Reihe konvergiert dabei in dem Sinne, dass für jedes (j,k) der Eintrag der Matrix $\sum_{l=0}^{N} \frac{t^l A^l}{l!}$ an der Stelle (j,k) konvergiert.

[Zum Beweis bestimme man $C \geq 0$ so, dass $\|A\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt (das gilt z.B. für $C = \Big(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2\Big)^{1/2}$). Dann ist $\|A^l\vec{x}\| \leq C^l\|\vec{x}\|$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left\| \frac{t^l A^l \vec{x}}{l!} \right\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|t|^l C^l \|\vec{x}\|}{l!} = e^{C|t|}\|\vec{x}\| < \infty,$$

so dass die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l \vec{x}}{l!}$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$ absolut konvergiert.]

Eigenschaften: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) Ist $AB = BA$, so gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Beweis wie beim Cauchyprodukt, wobei man beachtet, dass (wegen $AB = BA$!) gilt

$$(A+B)^l = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} A^j B^{l-j}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Die Matrix e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(3) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$.

(4) Für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ definiert $\vec{\phi}(t) := e^{tA}\vec{y}_0$ eine Lösung des homogenen Systems (H) mit Anfangswert $\vec{\phi}(0) = \vec{y}_0$. Mit anderen Worten:

> e^{tA} **ist dasjenige Fundamentalsystem** $\Phi(t)$ **von** (H) **mit** $\Phi(0) = I$.

Bemerkung: Sind $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ so, dass $(A - \lambda I)^m \vec{v} = 0$ gilt, so haben wir

$$e^{tA}\vec{v} = e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda I)}\vec{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

womit klar ist, dass die in 29.3 angegebenen $\vec{\phi}_j$ Lösungen von (H) sind. Ende Woche 9

Beispiele: 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$: Es gilt $A^2 = -\omega^2 I$, also für $k \in \mathbb{N}$:

$$A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A, \qquad A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} I.$$

Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Beachte $e^{0A} = I$ und

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \\ -\omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} = A\, e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es gilt

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N.$$

Wegen $(\lambda I)N = N(\lambda I)$ ist also

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}.$$

Nun hat N^k für $k = 1, \ldots, n-1$ auf der k-ten Nebendiagonalen Einsen und sonst Nullen, und N^k ist die Nullmatrix für $k \geq n$. Somit ist

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ die folgende Blockmatrix-Struktur (Jordan-Normalform, siehe HM II, 16.9) hat

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_l \end{pmatrix},$$

wobei jedes J_j, $j = 1\ldots, l$, die Form wie in Beispiel 2) hat (mit λ_j statt λ und Dimension n_j statt n, wobei $n_1 + \ldots + n_l = n$). Man erhält dann

$$e^{tA} = Se^{\begin{pmatrix} tJ_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & tJ_l \end{pmatrix}}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tJ_l} \end{pmatrix}S^{-1},$$

wobei die Matrizen $e^{tJ_j} \in \mathbb{C}^{n_j\times n_j}$ in Beispiel 2) berechnet wurden.
Man sieht hier deutlich, woher die polynomialen Anteile in den Fundamentalsystemen aus 29.3 kommen, nämlich von den Einsen auf der Nebendiagonalen in den Jordanblöcken J_j.

Variation der Konstanten: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t_0 \in I$, $\vec{b} : I \to \mathbb{C}^n$ stetig und $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$, so ist die eindeutige Lösung von

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I,$$

mit $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

Bemerkung: Wir betrachten diese Formel für $I = [0,\infty)$ und $t_0 = 0$. Dann ist der zweite Term die *Faltung* der matrixwertigen Funktion $t \mapsto e^{tA}$ mit der vektorwertigen Funktion $\vec{b}$. Nehmen wir weiter an, dass die Komponenten von $\vec{b}$ Laplace-transformierbar sind, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit genügend großem Realteil

$$\mathscr{L}\{\vec{y}(t)\}(s) = \mathscr{L}\{e^{tA}\}(s)\vec{y}_0 + \mathscr{L}\{e^{tA}\}(s)\mathscr{L}\{\vec{b}(t)\}(s)$$

und

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{tA}\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{tA}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\sum_{k=0}^\infty \frac{t^kA^k}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\frac{t^k}{k!}\,dt}_{=s^{-(k+1)}}\,A^k \\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{A}{s}\right)^k = \frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1} = (sI-A)^{-1}. \end{aligned}$$

Die matrixwertige Funktion $s \mapsto (sI - A)^{-1}$ heißt *Resolvente von* A, sie existiert für $s \in \mathbb{C} \setminus \{\text{Ewe von } A\}$ und ist *holomorph* ($\rightarrow$ HM II bzw. KAI) in dem Sinne, dass jeder Matrixeintrag eine holomorphe Funktion von s ist. Die obigen Rechnungen stimmen jedenfalls formal, können für $\operatorname{Re} s$ groß aber auch mathematisch exakt begründet werden. Für die Laplacetransformierte der Lösung erhalten wir so z.B.

$$\mathscr{L}\{\vec{y}(t)\}(s) = (sI - A)^{-1}\vec{y}_0 + (sI - A)^{-1}\mathscr{L}\{\vec{b}(t)\}(s),$$

was die Bedeutung der Resolvente bei der Lösung linearer Systeme unterstreicht.

Partielle Differentialgleichungen

Eine *partielle Differentialgleichung* ist eine Gleichung, welche Ableitungen einer gesuchten Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ enthält, wobei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$ ist.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es bei partiellen Differentialgleichungen je nach Art der vorliegenden Gleichung viele verschiedene Theorien. Partielle Differentialgleichungen können nach verschiedenen Aspekten klassifiziert werden, zB nach der *Ordnung* der höchsten auftretenden Ableitung der gesuchten Funktion oder *algebraisch*:

Lineare Gleichungen enthalten die gesuchte Funktion u und ihre Ableitungen nur linear, *quasilineare* Gleichungen sind linear in den höchsten Ableitungen von u. Gleichungen, die nicht quasilinear sind heißen *voll nicht-linear*. Solche Gleichungen können durch Differenzieren in quasilineare Gleichungen überführt werden.

Das Gebiet ist riesig, und wir werden einige typische Vertreter kennenlernen.

Beispiele: 1) $\partial_t u + \partial_x u = 0$ ist von erster Ordnung und linear.

2) $\partial_t u + u\partial_x u = 0$ ist von erster Ordnung und quasilinear.

3) $u_{xx}u_{yy} - (u_x y)^2 = f$ ist von zweiter Ordnung und voll nicht-linear. Leitet man nach x ab, erhält man die Gleichung

$$u_{xxx}u_{yy} + u_{xx}u_{xyy} - 2u_{xy}u_{xxy} = f_x,$$

die von dritter Ordnung und quasilinear ist.

4) Die Gleichungen $\Delta u = 0$ (Laplacegleichung), $u_t = u_{xx}$ (Wärmeleitungsgleichung) und $u_{tt} = u_{xx}$ (Wellengleichung) sind von zweiter Ordnung und linear.

30 Transportgleichungen und Charakteristiken

30.1 Lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die Gleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = g(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

für eine Funktion $u = u(x,t)$, die wir mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

lösen wollen. Hierbei sind $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Eine *Lösung* soll eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sein, die (1) und (2) genügt. Man ersieht hieraus schon, dass $g \in C(\mathbb{R}^2)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ gelten muss.

Bemerkung: Die Abbildung $u \mapsto \partial_t u + a\partial_x u$, wobei hier Funktionen u abgebildet werden, ist linear. Deshalb erhält man die Lösung von (1), (2) durch Addition der Lösungen für die Fälle $g = 0$ und $f = 0$.

Die linke Seite von (1) ist in der (x,t)-Ebene die Richtungsableitung von u in Richtung $\binom{a}{1}$.

Fall $g = 0$**:** Dann bedeutet (1), dass u auf Geraden $\binom{x}{t} + r\binom{a}{1}$, $r \in \mathbb{R}$, konstant ist. Ist $\binom{x}{t}$ fixiert, so trifft diese Gerade die Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$ im Punkt $\binom{x-at}{0}$ (setze $r = -t$). Aus (2) erhält man also

$$u(x,t) = f(x - at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

dh der Anfangswert wird mit Geschwindigkeit a nach rechts transportiert. Für $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist dies tatsächlich die eindeutige Lösung von (1), (2) im Fall $g = 0$.

Fall $f = 0$**:** Dann bedeutet (1):

$$\frac{\partial u}{\partial(a,1)}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

und wir erhalten u durch Integration von g auf der Geraden $\binom{x}{t} + \mathbb{R}\binom{a}{1}$:

$$u(x,t) = u(x,t) - \underbrace{u(x-at,0)}_{=0} = \int_0^t (Du)\left(\begin{pmatrix} x-at \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} dr = \int_0^t g(x-(t-r)a, r)\, dr.$$

Beachte, dass $f = 0$ ist und dass wir Du für die Ableitung von u geschrieben haben. Ist g stetig partiell nach x differenzierbar, so ist hierdurch tatsächlich eine Lösung von (1) mit $u(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben (verwende 22.2 aus HM II). Ende Woche 10

Satz: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell nach x differenzierbar, so ist die eindeutige Lösung von (1), (2) gegeben durch

$$u(x,t) = f(x-at) + \int_0^t g(x - a(t-r), r)\, dr, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

30.2 Lineare Transportgleichung im $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u + \vec{a} \cdot \nabla u &=& g(\vec{x},t), \quad (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(\vec{x},0) &=& f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array} \tag{1}$$

lässt sich wie in 30.1 behandeln.

Satz: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach jedem x_j, $j = 1, \ldots, n$, stetig partiell differenzierbar, so ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$u(\vec{x},t) = f(\vec{x} - t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x} - (t-r)\vec{a}, r)\, dr, \quad (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

30.3 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung

Allgemeiner als in 30.1 und 30.2 betrachten wir quasilineare Gleichungen der Form

$$\vec{a}(\vec{x}, u) \cdot \nabla u = b(\vec{x}, u), \quad \vec{x} \in D, \tag{Q}$$

in $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\vec{a} : D \times J \to \mathbb{R}^n$ und $b : D \times J \to \mathbb{R}$ gegeben sind und J ein reelles Intervall ist.

Nach den Erfahrungen in 30.1 betrachten wir eine gegebene Lösung $\vec{x} \mapsto u(\vec{x})$ auf Kurven $s \mapsto \vec{k}(s)$ in D und setzen $w(s) := u(\vec{k}(s))$ (s ist hier ein reeller Parameter aus einem Intervall I).

Ableiten von w ergibt nach der Kettenregel:

$$w'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{k}\,'(s) = \vec{k}\,'(s) \cdot \nabla u(\vec{k}(s)).$$

Andererseits ist

$$\vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \cdot \nabla u(\vec{k}(s)) = b(\vec{k}(s), w(s)).$$

Dies legt nahe, zur Lösung von (Q) das folgende *charakteristische System* zu betrachten

$$\begin{array}{rcl} \vec{k}\,'(s) & = & \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \\ w'(s) & = & b(\vec{k}(s), w(s)). \end{array} \tag{CS}$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ($n+1$ Gleichungen für die Funktion $\binom{\vec{k}}{w} : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

Definition: Lösungen $\binom{\vec{k}}{w}$ des charakteristischen Systems (CS) heißen *Charakteristiken* der Gleichung (Q), dabei heißt $\vec{k}$ *Grundcharakteristik*.

Bemerkung: Ist $\binom{\vec{k}}{w}$ eine Charakteristik, so ist die Grundcharakteristik $\vec{k}$ eine Kurve im Argumentraum $D \subset \mathbb{R}^n$ und w beschreibt (hoffentlich) den Wert einer Lösung auf dieser Kurve.

Hängt $\vec{a}(\vec{x}, u) = \vec{a}(\vec{x})$ nicht von u ab (man spricht dann von einer *semilinearen* Gleichung), so hängen die Grundcharakteristiken nicht von den Werten w ab, und man kann zunächst die erste Gleichung in (CS) und dann die zweite lösen. Gilt zusätzlich $b = 0$, so ist w konstant, was bedeutet, dass Lösungen von (Q) auf Grundcharakteristiken konstant sind.

Beispiel: Schreibt man in 30.1 (x_1, x_2) statt (x, t) und bringt die Gleichung 30.1 (1) mit $\vec{a}(\vec{x}, u) = \binom{a}{1}$ und $b(\vec{x}, u) = g(x_1, x_2)$ auf die Form (Q), so lautet das zugehörige charakteristische System

$$\begin{array}{rcl} k_1'(s) & = & a \\ k_2'(s) & = & 1 \\ w'(s) & = & g(k_1(s), k_2(s)). \end{array}$$

Grundcharakteristiken sind hier gegeben durch $\binom{k_1}{k_2}(s) = s\binom{a}{1} + \binom{c_1}{c_2}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Dies sind die Geraden aus 30.1. $w(s)$ erhält man dann wie in 30.1 durch Integration.

30.4 Anfangsbedingungen für quasilineare Gleichungen

Im Fall $n = 2$ wird man Anfangswerte für (Q) auf einer Kurve Γ in D vorgeben wollen. Man sieht schon im Beispiel in 30.3, dass Γ nicht eine der Grundcharakteristiken sein darf, da auf diesen die Werte der Lösung ja durch die zweite Gleichung in (CS) gegeben sind.

Im allgemeinen Fall gibt man eine genügend glatte Hyperfläche Γ in D vor und dort ebenfalls genügend glatte Anfangswerte $f(\vec{\xi})$, $\vec{\xi} \in \Gamma$. Dabei fordert man

(Γ, f) ist *nicht-charakteristisch*: in keinem $\vec{\xi} \in \Gamma$ ist $\vec{a}(\vec{\xi}, f(\vec{\xi}))$ tangential an Γ.

Diese Forderung gewährleistet, dass die Grundcharakteristiken Γ in einem Winkel $\neq 0$ schneiden. Sind dann noch $\vec{a}$ und b hinreichend glatt, kann man zeigen, dass (Q) lokal um Γ eindeutig lösbar ist.

Zweckmäßigerweise setzt man $s = 0$ auf Γ und löst (CS) mit dem Anfangswert

$$\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ f(\vec{\xi}) \end{pmatrix} \qquad \text{für jedes } \vec{\xi} \in \Gamma.$$

Bezeichnet man die Lösung von (CS) mit $\binom{\vec{k}(s,\vec{\xi})}{w(s,\vec{\xi})}$, so erhält man die Lösung $u(\vec{x})$ von (Q) durch

$$u(\vec{x}) = w(s, \vec{\xi}), \quad \text{falls } \vec{x} = \vec{k}(s, \vec{\xi}).$$

Beispiel: $\partial_t u + x\partial_x u = 0$ mit $u(x, 0) = f(x)$ und $x \in \mathbb{R}$. Hier ist $\vec{a}(x, t, u) = \binom{x}{1}$. Zur Parametrisierung der x-Achse verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{array}{rclcrcl} k_1'(s) &=& k_1(s) & \qquad & k_1(0) &=& \xi \\ k_2'(s) &=& 1 & & k_2(0) &=& 0 \\ w'(s) &=& 0 & & w(0) &=& f(\xi). \end{array}$$

mit Lösung $\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \\ w(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ s \\ f(\xi) \end{pmatrix}$. Wir haben

$$\vec{k}(s, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff s = t,\, \xi = xe^{-t}.$$

Wenn f stetig differenzierbar ist, ist die eindeutige Lösung des Problems also gegeben durch

$$u(x, t) = f(e^{-t}x), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

31 Die Potentialgleichung

Die Potentialgleichung oder auch *Poisson-Gleichung* ist die lineare Gleichung zweiter Ordnung

$$\Delta u = f$$

in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Im homogenen Fall $f = 0$ spricht man auch von der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0.$$

Bemerkung: Ein wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$ (dh $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$) ist (zumindest lokal) als Gradient eines Skalarfeldes V darstellbar $\vec{F} = \nabla V$. Ist das Vektorfeld zusätzlich quellenfrei (dh $\operatorname{div} \vec{F} = 0$), so genügt V der Laplace-Gleichung:

$$\Delta V = \operatorname{div}(\nabla V) = \operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Beispiele sind in der Elektrostatik das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla V$, wobei typischerweise das Potential V an der Oberfläche eines Gebietes vorgegeben ist, oder in der Magnetostatik die magnetische Induktion $\vec{B} = -\nabla V$, wobei typischerweise $\frac{\partial V}{\partial \vec{N}} = 0$ am Rand eines Gebietes gilt (dh $\vec{B}$ ist am Rand tangential zur Oberfläche). Ende Woche 11

31.1 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch in* Ω, falls gilt

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Beispiele: 1) Für $n = 1$ und $I \subset \mathbb{R}$ Intervall sind die in I harmonischen Funktionen u alle von der Form $u(x) = ax + b$, $x \in I$.

2) Sei $n = 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, sowie $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine holomorphe Funktion ($\to$ Kap. 24 in HM II bzw. KAI). Dann sind u und v beliebig oft differenzierbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \Omega.$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

dh Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.
Umgekehrt ist eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zumindest lokal Realteil einer holomorphen Funktion (der "passende" Imaginärteil v heißt *konjugiert harmonische Funktion von* u).
Insbesondere ist für $n = 2$ eine harmonische Funktion immer beliebig oft differenzierbar. Dies gilt auch für $n > 2$.

3) In Beispiel 21.10(5) haben wir gesehen, dass die durch $u(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ definierte Funktion u in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch ist.

31.2 Mittelwerteigenschaft

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ein stetiges $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn für jede Kugel

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \subset \Omega$$

gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|B(\vec{x}_0, r)|} \iiint_{B(\vec{x}_0,r)} u \, d\tau \qquad \text{(Kugelmittel)}$$

bzw. genau dann, wenn für jede solche Kugel gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|\partial B(\vec{x}_0, r)|} \iint_{\partial B(\vec{x}_0,r)} u \, do \qquad \text{sphärisches Mittel).}$$

Hierbei bezeichnet $|B(\vec{x}_0, r)| = \frac{4\pi}{3} r^3$ das Volumen von $B(\vec{x}_0, r)$ und $|\partial B(\vec{x}_0, r)| = 4\pi r^2$ die Oberfläche der Kugel.

Die entsprechenden Aussagen gelten aber für jedes $n \geq 2$.

31.3 Maximumsprinzip

Sei u harmonisch im Gebiet Ω. Gibt es ein $\vec{x}_0 \in \Omega$ mit

$$\begin{array}{rll} & u(\vec{x}_0) \geq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega & (u \text{ hat lokales Maximum in } \vec{x}_0) \\ \text{oder} & u(\vec{x}_0) \leq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega & (u \text{ hat lokales Minimum in } \vec{x}_0), \end{array}$$

so ist u auf Ω konstant. Ist zusätzlich Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:

$$\min_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}) \leq u(\vec{x}) \leq \max_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}),$$

dh harmonische Funktionen nehmen Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

31.4 Grundlösung der Laplace-Gleichung

Die für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definierte Funktion

$$\Gamma(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|\vec{x}\| & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{4\pi} \|\vec{x}\|^{-1} & \text{für } n = 3 \end{cases}$$

heißt *Grundlösung der Laplacegleichung* oder auch *Fundamentallösung*. Häufig schreibt man dann

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \vec{x} \neq \vec{y}.$$

Bemerkung: Für allgemeines $n \geq 3$ lautet die Formel für die Grundlösung

$$\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \|\vec{x}\|^{2-n},$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet (es ist also $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$).

Man erhält $\Gamma(\vec{x})$, wenn man eine Lösung u der Laplacegleichung der Form $u(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$ sucht, wobei $g = g(r)$ eine C^2-Funktion auf $(0, \infty)$ ist. Das führt auf die Gleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r) = 0, \quad r > 0$$

mit Lösung $g'(r) = cr^{1-n}$. Dies bestimmt g bis auf eine additive Konstante, c wird so gewählt, dass die Formel in 31.5 unten gilt.

Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall $n = 3$.

Eigenschaften ($n = 3$): Für $j = 1, \ldots, 3$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} x_j \|\vec{x}\|^{-3},$$

also

$$\nabla\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{x} \|\vec{x}\|^{-3}$$

und

$$\nabla_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{x} - \vec{y})\|\vec{x} - \vec{y}\|^{-3}, \qquad \nabla_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{y} - \vec{x})\|\vec{x} - \vec{y}\|^{-3}.$$

Weiter ist

$$\Delta\Gamma(\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0}), \qquad \Delta_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{y}), \qquad \Delta_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \neq \vec{x}),$$

dh Γ ist in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch, $\vec{x} \mapsto \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{y}\}$ und $\vec{y} \mapsto \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x}\}$.

31.5 Greensche Darstellungsformel

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ mit C^2-Rand, und sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset V$. Ist $u \in C^2(V)$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:

$$u(\vec{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial\vec{N}}(\vec{y}) \right) do(\vec{y}) + \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) \, d\tau(\vec{y}).$$

Beachte hierbei $\frac{\partial u}{\partial\vec{N}}(\vec{y}) = \nabla u(\vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y})$ und

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} - \vec{x}}{4\pi\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \cdot \vec{N}(\vec{y}).$$

Beweisidee: Verwende für festes $\vec{x} \in \Omega$ die zweite Greensche Formel in 21.10(3), dh Ende Woche 12

$$\iint\limits_{\partial G} \Big(g\frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f\frac{\partial g}{\partial \vec{N}}\Big)\, do = \iiint\limits_{G} \Big(g\Delta f - f\Delta g\Big)\, d\tau$$

für $G = \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\vec{x},\varepsilon)$, $g(\vec{y}) = u(\vec{y})$ und $f(\vec{y}) = \Gamma(\vec{x},\vec{y})$. Hierbei sei ε so klein, dass $\overline{B(\vec{x},\varepsilon)} \subset \Omega$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\vec{x},\vec{y})\Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) + \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y})\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\vec{x},\vec{y})\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y})\right) do(\vec{y})\\ = &\iint\limits_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} \left(u(\vec{y})\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\vec{x},\vec{y})\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y})\right) do(\vec{y}).\end{aligned}$$

Beachte hier, dass für $\vec{y} \in \partial B(\vec{x},\varepsilon)$ gilt: $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{\varepsilon}$. Mit der Formel für $\nabla_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x},\vec{y})$ aus 31.4 erhalten wir

$$= \iint\limits_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} u(\vec{y})\, \underbrace{\frac{\|\vec{y}-\vec{x}\|^2}{4\pi\varepsilon\|\vec{y}-\vec{x}\|^3}}_{=1/(4\pi\varepsilon^2)}\, do(\vec{y}) + \iint\limits_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} \underbrace{\frac{1}{4\pi\|\vec{y}-\vec{x}\|}}_{=1/(4\pi\varepsilon)}\, \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y})\, do(\vec{y}).$$

Da u in $\vec{x}$ stetig ist und $4\pi\varepsilon^2$ gerade die Oberfläche von $B(\vec{x},\varepsilon)$, konvergiert das erste Integral für $\varepsilon \to 0$ gegen $u(\vec{x})$. Da ∇u in der Nähe von $\vec{x}$ beschränkt ist, konvergiert das zweite Integral für $\varepsilon \to 0$ gegen Null. Wir haben ähnlich auch schon in 21.10(6) in HM II argumentiert.

31.6 Greensche Funktion

Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $G(\vec{x},\vec{y})$, welche für $\vec{x},\vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ definiert ist, heißt *Greensche Funktion von* Ω, falls G symmetrisch ist (dh $G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{y},\vec{x})$ gilt) und für jedes $\vec{y} \in \Omega$ gilt:

$$G(\vec{x},\vec{y}) = 0 \text{ für alle } \vec{x} \in \partial\Omega \text{ und } \vec{x} \mapsto h(\vec{x},\vec{y}) := G(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\vec{x},\vec{y}) \text{ ist harmonisch in } \Omega.$$

Bemerkung: Die zweite Bedingung bedeutet, dass G und Γ in $\vec{x} = \vec{y}$ "die gleiche" Singularität haben. Zusammen bedeuten die Bedingungen, dass für festes $\vec{y} \in \Omega$ die Funktion $\vec{x} \mapsto G(\vec{x},\vec{y})$ Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = \delta_{\vec{y}}, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

ist.

Erläuterung: Setze $u(\vec{x}) := G(\vec{x},\vec{y})$, wobei $\vec{y} \in \Omega$ fest ist. Dann ist $u(\vec{x}) = 0$ für $\vec{x} \in \partial\Omega$ klar. Die Gleichung $\Delta u = \delta_{\vec{y}}$ ist *distributionell* zu verstehen, dh man multipliziert mit C^2-Funktionen $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die es eine Menge $B \subset \Omega$ mit $\overline{B} \subset \Omega$ so gibt, dass

$\psi = 0$ außerhalb von B gibt, und integriert über Ω. Solche Funktionen ψ und alle ihre Ableitungen verschwinden also am Rand von Ω.

Dabei ist $\delta_{\vec{y}}$ die Dirac"funktion" in $\vec{y}$, erklärt durch

$$\delta_{\vec{y}}(\psi) = \psi(\vec{y}).$$

Man schreibt formal mitunter statt $\delta_{\vec{y}}(\psi)$ auch

$$\iiint\limits_{\Omega} \psi(\vec{x})\delta_{\vec{y}}(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) \quad \text{oder} \quad \iiint\limits_{\Omega} \psi(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{y})\, d\tau(\vec{x}).$$

Auch Δu ist hier distributionell zu verstehen. Für eine Distribution T ist dabei (vgl. HMII bzw. KAI für den Fall $n = 1$):

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}T\Big)(\psi) := T\Big(-\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big), \quad j = 1, \ldots, n,$$

und also

$$(\Delta T)(\psi) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}T\Big)(\psi) = \sum_{j=1}^{n} T\Big((-1)^2\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big) = T(\Delta\psi).$$

Somit erhalten wir

$$(\Delta u)(\psi) = u(\Delta\psi) = \iiint\limits_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y})(\Delta\psi)(\vec{x})\, d\tau(\vec{x})$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x},\vec{y})(\Delta\psi)(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) + \iiint\limits_{\Omega} h(\vec{x},\vec{y})(\Delta\psi)(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}).$$

Nach 31.5 ist dabei das erste Integral $= \psi(\vec{y})$, da die Randterme für ψ verschwinden. Das zweite Integral verschwindet wegen der zweiten Greenschen Formel, da $h(\cdot,\vec{y})$ in Ω harmonisch ist.

Beobachtung: Wendet man (bei genügend glattem Rand $\partial\Omega$) die zweite Greensche Formel an auf $f(\vec{y}) = h(\vec{x},\vec{y})$ und $g = u$ und addiert das Ergebnis zur Greenschen Darstellungsformel 31.5, so erhält man

$$u(\vec{x}) = \iint_{\partial\Omega}\left(u(\vec{y})\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y})\right) do(\vec{y}) + \iiint_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y})\Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}),$$

dh man kann mithilfe der Greenschen Funktion (wenn sie existiert!) eine Lösung $u \in C^2(V)$ des Dirichletproblems

$$\Delta u = f, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

im Inneren von Ω aus den Daten f und φ rekonstruieren.

Bemerkung: Ist Ω beschränkt mit C^2-Rand, so existiert eine Greensche Funktion für Ω.

Beispiel: Die Greensche Funktion für die Kugel $B(\vec{0}, R)$ ist gegeben durch:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}, \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}) & , \vec{y} \neq \vec{0} \\ \Gamma(\vec{x}) - \Gamma(\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}) & , \vec{y} = \vec{0} \end{cases}.$$

Beachte dazu, dass für $\vec{y} \neq \vec{0}$ gilt

$$\left\| \frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y} \right\|^2 = \frac{\|\vec{y}\|^2 \|\vec{x}\|^2}{R^2} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + R^2$$

und dass der rechte Ausdruck symmetrisch in $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist. Außerdem ist $G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für $\|\vec{y}\| = R$. Für festes $\vec{y} \in B(\vec{0}, R) \setminus \{\vec{0}\}$ ist die Singularität von $G(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in $\vec{x} = \frac{R^2}{\|\vec{y}\|^2}\vec{y}$ und liegt außerhalb von $B(\vec{0}, R)$.

31.7 Dirichletproblem auf der Kugel

Betrachte die Kugel $B(\vec{0}, R) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $\varphi : \partial B(\vec{0}, R) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $u : \overline{B(\vec{0}, R)} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \iint_{\partial B(\vec{0},R)} \frac{\varphi(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \, do(\vec{y}) & \text{für } \vec{x} \in B(\vec{0}, R) \\ \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in \partial B(\vec{0}, R) \end{cases}, \tag{PF}$$

harmonisch in $B(\vec{0}, R)$ und stetig in $\overline{B(\vec{0}, R)}$. Dies ist die *Poissonsche Darstellungsformel* für die nach 31.3 eindeutige Lösung des *Dirichletproblems*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B(\vec{0}, R), \quad u|_{\partial B(\vec{0},R)} = \varphi.$$

Beachte, dass man die Formel (PF) aus 31.6 erhält, wenn man für die Greensche Funktion der Kugel $B(\vec{0}, R)$ den Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{y}} G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y}), \quad \vec{y} \in \partial B(\vec{0}, R),$$

unter Berücksichtigung von $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}}{R}$ berechnet (Übung!).

31.8 Die Poissongleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\overline{\Omega})$. Eine Lösung der Poissongleichung

$$(\Delta u)(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \tag{P}$$

ist gegeben durch das *Newton-Potential von f*, dh durch

$$w(\vec{x}) := \iiint_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}.$$

Warnung: Es gilt $w \in C^1(\Omega)$. Im allgemeinen ist jedoch w **keine** C^2-Funktion in Ω. Gilt zusätzlich

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq C\|\vec{x} - \vec{y}\|^{\alpha}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Omega,$$

wobei $C > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ Konstanten sind, so ist $w \in C^2(\Omega)$ und eine solche Abschätzung (mit demselben α aber anderen Konstanten C) gilt für alle zweiten Ableitungen von w.

Bemerkung: Will man die Poissongleichung mit Randwerten lösen, also etwa

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{P_D}$$

wobei $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, so erhält man die Lösung als $u = w + z$, wobei w das Newton-Potential von f ist und $z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\Delta z = 0 \text{ in } \Omega, \qquad z|_{\partial\Omega} = \varphi - (w|_{\partial\Omega}).$$

Bemerkung: Ist $G(\vec{x}, \vec{y})$ eine Greensche Funktion für Ω, so ist auch durch

$$v(\vec{x}) = \iiint_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega},$$

eine Lösung von (P) gegeben und zwar diejenige, die außerdem $v|_{\partial\Omega} = 0$ genügt. Eine Lösung von (P_D) erhält man dann durch

$$u(\vec{x}) = \iiint_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) + \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) \varphi(\vec{y})\, do(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega},$$

vergleiche Bemerkung in 31.6. Ende Woche 13

32 Die Diffusionsgleichung

32.1 Motivation (Wärmeleitungsgleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir betrachten Wärmeleitung in Ω und eine Funktion $u = u(t, \vec{x})$, wobei $t \in [0, T]$ und $\vec{x} \in \Omega$, die die Temperaturverteilung beschreibt. Wir setzen voraus, dass das Medium in Ω homogen ist. Für jedes Gebiet $G \subset \Omega$ ist dann

$$\iiint\limits_G u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x})$$

proportional zur in Wärmeenergie in G. Energieerhaltung bedeutet also für ein glattes Gebiet G:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_G u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = \underbrace{-\iint\limits_{\partial G} \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x})\, do(\vec{x})}_{\text{Wärmetransport durch } \partial G} + \underbrace{\iiint\limits_G f(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x})}_{\text{Wärmequellen in } G},$$

wobei $\vec{j}(t, \vec{x})$ der Vektor des Wärmeflusses sei. Wenn u glatt genug ist, kann man links Integral und $\frac{d}{dt}$ vertauschen ($\rightarrow$ Kap.22 in HMII) und erhält mit dem Divergenzsatz:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = -\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) + \iiint\limits_G f(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}).$$

Da $G \subset \Omega$ sonst beliebig ist, geht dies nur, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = -\operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x}) + f(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega.$$

Fouriers Gesetz besagt nun

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = -c \nabla u(t, \vec{x}) \quad \text{für ein } c > 0$$

dh dass sich die Wärme in Richtung des größten Temperaturgefälles ausbreitet und betragsmäßig proportional zur Länge des Gradienten $\nabla u(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}(t, \vec{x})$ ist. Zusammen ergibt sich die Wärmeleitungsgeichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = c \Delta u(t, \vec{x}) + f(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega,$$

wobei sich $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nur auf die räumlichen Variablen bezieht.

Bemerkung: Genauso lässt sich argumentieren, wenn $u(t, \vec{x})$ die Dichte eines Gases beschreibt, dass in Ω der Diffusion unterliegt, oder wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \neq 3$.

32.2 Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten

$$\partial_t u(t,\vec{x}) = (\Delta u)(t,\vec{x}), \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{W}$$

Die für $t>0$ und $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ definierte Funktion

$$G(t,\vec{x}) := (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4t}}$$

heißt *Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung* oder *Wärmeleitungskern auf dem* $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\partial_t G(t,\vec{x}) = \Delta G(t,\vec{x}) \quad \text{für alle } t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n,$$

dh G ist Lösung von (W). Häufig schreibt man auch

$$G(t,\vec{x},\vec{y}) := G(t,\vec{x}-\vec{y}) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4t}} \quad \text{für } t>0,\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = 1 \tag{I}$$

für alle $t>0$ und

$$G(t,\vec{x}) \longrightarrow 0 \quad (t\to 0+) \quad \text{für } \vec{x}\neq\vec{0},$$

sowie

$$G(t,\cdot) \longrightarrow \delta_{\vec{0}} \quad (t\to 0+)$$

im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\varphi(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) \longrightarrow \varphi(\vec{0}) \quad (t\to 0+) \tag{K}$$

für alle stetigen Funktionen $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $\varphi=0$ außerhalb einer Kugel $B(\vec{0},R)$. Die Konvergenzaussage gilt dabei für viel mehr Funktionen, vgl. 32.3 unten.

Beweis für (I)**:** Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x})$ ist gleich

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\Big((4\pi t)^{-1/2}e^{-\frac{x_j^2}{4t}}\Big)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1 = \prod_{j=1}^{n}\Big((4\pi t)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{4t}}\,dx_j\Big).$$

Für ein einzelnes Integral führt die Substitution $\xi = 2\eta\sqrt{t}$, $d\xi = 2\sqrt{t}\,d\eta$, auf

$$(4\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = 1,$$

vergleiche Beispiel (3) in 21.4 (HMII).

Beweisskizze für (K)**:** Zunächst ist φ beschränkt, und es gibt $K > 0$ mit $\|\varphi(\vec{x})\| \leq K$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $\|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})\| < \varepsilon/2$ für $\|\vec{x}\| \leq \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\varphi(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) - \varphi(\vec{0}) \Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{G(t,\vec{x})}_{>0} |\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})|\, d\tau(\vec{x}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\|\vec{x}\|\leq\delta} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) + 2K \int\limits_{\|\vec{x}\|\geq\delta} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}). \end{aligned}$$

Das erste Integral rechts ist ≤ 1 wegen (I). Im zweiten Integral substituiert man $\vec{x} = \vec{y}\sqrt{t}$ und erhält

$$\int\limits_{\|\vec{x}\|\geq\delta} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = \int\limits_{\|\vec{y}\|\geq\delta/\sqrt{t}} G(1,\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) \longrightarrow 0 \quad (t \to 0+).$$

Insbesondere findet man $t_0 > 0$ so, dass für $t \in (0, t_0)$ das zweite Integral $\leq \frac{\varepsilon}{4K}$ ist.

32.3 Anfangswerte für $t = 0$

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so gibt es genau eine beschränkte Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,\vec{x}) &= (\Delta u)(t,\vec{x}), \quad t > 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,\vec{x}) &= f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Diese ist gegeben durch

$$u(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x}-\vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und

$$u(t,\vec{x}) \longrightarrow f(\vec{x}) \quad (t \to 0+) \quad \text{für jedes } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Ist $g : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, so ist eine Lösung von

$$\partial_t u(t,\vec{x}) - \Delta u(t,\vec{x}) = g(t,\vec{x}),\ t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u(0,\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben durch

$$u(t,\vec{x}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(t-s, \vec{x}-\vec{y}) g(s,\vec{y})\, d\tau(\vec{y})\, ds, \quad t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist (formal!) die "Variation-der-Konstanten-Formel".

32.4 Maximumsprinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $T \in (0, \infty)$ und $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$. Dann gilt

$$\partial\Omega_T = (\{0, T\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0, T] \times \partial\Omega).$$

Wir definieren den *parabolischen Rand*

$$\partial^*\Omega_T := (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0, T] \times \partial\Omega),$$

bei dem der "Deckel" des Zylinders fehlt.

Wir setzen voraus

$$u : [0, T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ ist stetig und in } \Omega_T \text{ zweimal stetig partiell differenzierbar nach } x_1, \dots, x_n, \text{ sowie stetig partiell nach } t \text{ differenzierbar.} \tag{RV}$$

Satz: Es gelte (RV) und $\partial_t u - \Delta u = 0$ in Ω_T. Dann nimmt u Maximum und Minimum auf dem parabolischen Rand $\partial^*\Omega_T$ an, dh es gilt

$$\begin{aligned} \max\{u(t, \vec{x}) : t \in [0, T], \vec{x} \in \overline{\Omega}\} &= \max\{u(t, \vec{x}) : (t, \vec{x}) \in \partial^*\Omega_T\} \\ \min\{u(t, \vec{x}) : t \in [0, T], \vec{x} \in \overline{\Omega}\} &= \min\{u(t, \vec{x}) : (t, \vec{x}) \in \partial^*\Omega_T\}. \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt die Aussage über das Minimum, wenn $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ in Ω_T, und die Aussage über das Maximum gilt, wenn $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ in Ω_T.

Folgerung: Das Anfangs-Randwertproblem

$$\partial_t u - \Delta u = g \text{ in } \Omega_T, \qquad u(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}),\ (t, \vec{x}) \in \partial^*\Omega_T,$$

hat höchstens eine Lösung $u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (RV).

Beweis: Sind u_1 und u_2 Lösungen, so ist $v := u_1 - u_2$ Lösung von

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_T, \qquad u|_{\partial^*\Omega_T} = 0.$$

Aus dem Maximumsprinzip folgt dann $u = 0$ in Ω_T.

32.5 Separation der Variablen

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ mit homogenen Dirichletrandbedingungen:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, x \in (0, 1), \qquad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \qquad u(0, x) = f(x), \tag{1}$$

wobei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Zur Lösung machen wir den *Separationsansatz*

$$u(t, x) = v(t)w(x), \qquad t > 0, x \in [0, 1].$$

Dann ist $u_t = v'(t)w(x)$ und $u_{xx} = v(t)w''(x)$, und Einsetzen in die Gleichung führt (für $v \neq 0$, $w \neq 0$) auf

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}, \qquad t > 0, x \in [0,1].$$

Da die linke Seite nicht von x und die rechte Seite nicht von t abhängt, geht dies nur, wenn es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}, \qquad t > 0, x \in [0,1].$$

Dies führt auf $v(t) = e^{\lambda t} v(0)$, $t > 0$, und auf

$$w''(x) - \lambda w(x) = 0, \qquad w(0) = w(1) = 0,$$

wobei wir auch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems berücksichtigt haben. Wir suchen nun λ, für die es Lösungen $w \neq 0$ dieses Randwertproblems gibt.

Für $\lambda = 0$ ist jede Lösung von $w'' = 0$ ein Gerade. Aus den Randbedingungen folgt dann $w = 0$.

Für $\lambda \neq 0$ ist jede Lösung von $w'' - \lambda w = 0$ dabei eine Linearkombination

$$w(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x},$$

wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\mu^2 = \lambda$. Die Randbedingungen implizieren nun

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{und} \quad c_1 e^{\mu} + c_2 e^{-\mu} = 0.$$

Dieses lineares Gleichungssystem hat genau dann eine nichttriviale Lösung $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$, wenn $e^{-\mu} - e^{\mu} = 0$ ist. Dies ist äquivalent zu $e^{2\mu} = 1$, dh zu $\mu = k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($k = 0$ ist wegen $\mu \neq 0$ ausgeschlossen). Wir erhalten also $\lambda_k = -k^2\pi^2$ und als zugehörige reelle Lösung (bis auf eine multiplikatve Konstante)

$$w_k(x) = \sin(k\pi x) = \frac{1}{2i}\,(e^{k\pi i x} - e^{-k\pi i x}), \qquad x \in [0,1].$$

Zusammen haben wir also Lösungen

$$u_k(t,x) = e^{-k^2\pi^2 t} w_k(x) = e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x), \quad t \geq 0, x \in [0,1],$$

erhalten mit Anfangswerten $u_k(0,x) = w_k(x) = \sin(k\pi x)$, $x \in [0,1]$.

Gilt nun $f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \sin(k\pi x)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und gewisse $a_k \in \mathbb{R}$, so ist die Lösung von (1) gegeben durch

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^m a_k u_k(t,x) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x), \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,1].$$

Entsprechendes gilt für $m = \infty$, wenn man die Koeffizienten (a_k) so sind, dass man den Reihen einen Sinn geben kann. Dies ist z.B. für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ der Fall. Die Reihe für f konvergiert dann absolut und gleichmäßig auf $[0, 1]$ und u ist stetig auf $[0, \infty) \times [0, 1]$. Gliedweises Ableiten der Reihe für u ist in $(0, \infty) \times [0, 1]$ möglich nach Sätzen aus HM I.

Bemerkung: Ein analoges Vorgehen ist möglich bei Gleichungen

$$\partial_t u - \Delta u = 0,\ t > 0, \vec{x} \in \Omega, \qquad u(t, \vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega, \qquad u(0, \vec{x}) = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \tag{2}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist. Auch hier muss man λ (die *Eigenwerte*) und Funktionen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ (die *Eigenfunktionen*) suchen mit

$$\Delta w = \lambda w \text{ in } \Omega, \qquad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Man braucht etwas mehr mathematische Theorie um zu zeigen, dass dies hier immer auf eine Folge (λ_k) von Eigenwerten führt mit $\lambda_k \to -\infty$ (ohne weitere Voraussetzungen an Ω).

Fordert man statt der homogenen Dirichletbedingung $u(t, \vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \partial\Omega$, homogene Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \vec{N}} u(t, \vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega,$$

so braucht man für eine entsprechende Aussage Regularitätsvoraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$.

Ende Woche 14

33 Die Wellengleichung

33.1 Die eindimensionale Wellengleichung

Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) & = & 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) & = & f(x), \\ u_t(0,x) & = & g(x), \end{array} \tag{W1}$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sind. Eine Lösung ist eine C^2-Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die (W1) genügt. Somit muss $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ gelten.

Wir setzen also $f \in C^2(R)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ voraus. Zur Lösung von (W1) faktorisieren wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)$$

und setzen $v := u_t + u_x$. Zu lösen ist also zunächst

$$v_t - v_x = 0, \qquad v(0,x) = u_t(0,x) + u_x(0,x) = g(x) + f'(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Die eindeutige Lösung ist nach 30.1 gegeben durch

$$v(t,x) = g(x+t) + f'(x+t), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir lösen nun

$$u_t + u_x = v(t,x) = g(x+t) + f'(x+t), \qquad u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Nach 30.1 ist die eindeutige Lösung hiervon gegeben durch

$$u(t,x) = f(x-t) + \int_0^t g(x-t+2r) + f'(x-t+2r)\,dr.$$

Wir substituieren $x - t + 2r = y$, also $dr = \frac{1}{2}\,dy$, und erhalten

$$u(t,x) = f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f'(y)\,dy}_{=f(x+t)-f(x-t)},$$

also

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy \tag{D1}$$

als Darstellung für die eindeutige Lösung von (W1) auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (beachte dabei die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f und g).

Bemerkung: Man erhält die Lösungsformel auch aus der Beobachtung, dass für C^2-Funktionen φ und ψ durch

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

eine Lösung von $u_{tt} - u_{xx} = 0$ gegeben ist. Dann sucht man φ und ψ so, dass u Lösung von (W1) wird.

33.2 Diskussion

An der Formel (D1) kann man wesentliche Unterschiede zu Lösungen der Wärmeleitungsgleichung erkennen:

- Man kann die Wellengleichung für $t \in \mathbb{R}$ lösen, die Wärmeleitungsgleichung hingegen nur für $t > 0$.
- Für $t > 0$ ist der Wert $u(t,x)$ einer Lösung der Wellengleichung schon bestimmt durch die Werte von f und g im Intervall $[x-t, x+t]$. Umgekehrt beeinflussen die Anfangswerte im Punkt $(0,y)$ die Werte der Lösung nur in dem Kegel $|x-y| \leq t$, dh Störungen haben eine *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* (hier 1). Hingegen haben Störungen im Anfangswert für die Wärmeleitungsgleichung eine *unendliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit: ist der Anfangswert etwa > 0 nur auf einem kleinen Intervall und $= 0$ außerhalb, so ist $u(t,x) > 0$ für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.
- Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind C^∞ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, selbst wenn der Anfangswert nur (beschränkt) und stetig ist. Hier müssen wir hingegen $f \in C^2$, $g \in C^1$ voraussetzen, um $u \in C^2$ zu erhalten. Für mehr Regularität von u muss man mehr Regularität von den Anfangswerten fordern.

33.3 Die dreidimensionale Wellengleichung

Satz: Die eindeutige Lösung für das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,\vec{x}) - \Delta u(t,\vec{x}) &= 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(0,\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ u_t(0,\vec{x}) &= g(\vec{x}), \end{aligned} \tag{W3}$$

mit gegebenen $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ lässt ich darstellen als

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},t)} \Big(t g(\vec{y}) + f(\vec{y}) + \nabla f(\vec{y}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) \Big)\, do(\vec{y}). \tag{D3}$$

Beweisskizze (Methode der sphärischen Mittel): Sei $u(\vec{x},t)$ eine Lösung von (W3). Wir definieren für $r > 0$:

$$M(t,\vec{x},r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} u(t,\vec{y})\, do(\vec{y})$$

und

$$F(\vec{x},r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} f(\vec{y})\, do(\vec{y}), \qquad G(\vec{x},r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} g(\vec{y})\, do(\vec{y})$$

und setzen diese Funktionen gerade auf $r \in \mathbb{R}$ fort. Dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t,x,r) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) M(t,x,r). \tag{*}$$

Zum Beweis von (*) setzen wir für $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$:

$$S(v,r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(\vec{x},r)} v(\vec{y})\, do(\vec{y}).$$

Dann ist mithilfe der Substitution $\vec{y} = \vec{x} + r\vec{\eta}$, $do(\vec{y}) = r^2\, do(\vec{\eta})$:

$$\begin{aligned}
\partial_r S(v,r) &= \partial_r \Big[\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial B(\vec{0},1)} v(\vec{x}+r\vec{\eta})\, do(\vec{\eta})\Big] \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial B(\vec{0},1)} (\nabla v)(\vec{x}+r\vec{\eta}) \cdot \vec{\eta}\, do(\vec{\eta}) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} \frac{\partial v}{\partial \vec{N}}(\vec{y})\, do(\vec{y}) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint\limits_{B(\vec{x},r)} (\Delta v)(\vec{y})\, do(\vec{y}),
\end{aligned}$$

wobei wir beim dritten Gleichheitszeichen zurücksubstituieren und $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{r} = \vec{\eta}$ für $\vec{y} \in \partial B(\vec{x},r)$ beachten und beim letzten Gleichheitszeichen den Divergenzsatz verwenden. Daraus folgt

$$\partial_r^2 S(v,r) = \frac{-2}{4\pi r^3} \iiint\limits_{B(\vec{x},r)} (\Delta v)(\vec{y})\, do(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} (\Delta v)(\vec{y})\, do(\vec{y}) = -\frac{2}{r}\partial_r S(v,r) + S(\Delta v, r).$$

Wir wenden diese Formel für festes t auf $v(\vec{y}) = u(t,\vec{y})$ an. Da u Lösung von (W3) ist, gilt

$$u_{tt}(t,\vec{y}) = \Delta u(t,\vec{y}) = \Delta v(\vec{y}),$$

und nach Kap. 22 ist

$$\partial_t^2 M(t,\vec{x},r) = S(u_{tt}(t,\vec{y}),r).$$

Damit ist (*) gezeigt.

Nach (*) ist für festes $\vec{x}$ also $w(r,t) := M(t,\vec{x},r)$ Lösung von

$$w_{tt} = w_{rr} + \frac{2}{r} w_r, \qquad w(r,0) = F(\vec{x},r),\ w_t(r,0) = G(\vec{x},r).$$

Damit ist aber $v := rw$ Lösung von

$$v_{tt} = v_{rr}, \qquad v(r,0) = rF(\vec{x},r),\ v_t(r,0) = rG(\vec{x},r).$$

Nach 33.1 haben wir also

$$\begin{aligned} rM(t,\vec{x},r) &= \frac{1}{2}\Big[(r+t)F(\vec{x},r+t)+(r-t)G(\vec{x},r-t)\Big]+\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}\rho G(\vec{x},\rho)\,d\rho, \\ M(t,\vec{x},r) &= \frac{1}{2r}\Big[(t+r)F(\vec{x},t+r)-(t-r)G(\vec{x},t-r)\Big]+\frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\rho G(\vec{x},\rho)\,d\rho. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichung wird verwendet, dass $r \to G(\vec{x},r)$ eine gerade Funktion ist und $\rho \to \rho G(\vec{x},\rho)$ eine ungerade Funktion ist.

Für $r \to 0$ erhalten wir

$$u(t,\vec{x}) = tG(\vec{x},t)+\frac{\partial}{\partial t}(tF(\vec{x},t)), \tag{D3'}$$

woraus (D3) folgt. Umgekehrt definiert (D3) tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung (man muss dazu wie beim Beweis von (*) substituieren).

Bemerkung: Der Wert von u im Punkt $(t,\vec{x})$ hängt hier nur von den Anfangsdaten auf der Sphäre $\partial B(\vec{x},t)$ ab, aber nicht von Werten im Inneren der Kugel $B(\vec{x},t)$ (*Huygenssches Prinzip*, "there's music in $\mathbb{R}^3$").

Hier braucht man sogar $f \in C^3$, $g \in C^2$, damit $u \in C^2$ ist, dh die Anfangsdaten müssen *regulärer* sein, als es die Lösung ist.

33.4 Die zweidimensionale Wellengleichung

Man erhält die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung, indem man $x_3 = 0$ in (D3') setzt. Die dreidimensionale Sphäre

$$\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+y_3^2=t^2\}$$

wird (mit $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$) über die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B(\vec{x},t)}$ parametrisiert, dh durch

$$y_3 = \pm\sqrt{t^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}.$$

Dies führt auf

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B(\vec{x},t)}\frac{g(\vec{y})}{\sqrt{t^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}}\,d\tau(\vec{y})+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B(\vec{x},t)}\frac{f(\vec{y})}{\sqrt{t^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}}\,d\tau(\vec{y})\Big). \tag{D2}$$

Hier hängt der Wert von u im Punkt $(t,\vec{x})$ von den Anfangsdaten in der *ganzen* Kreisscheibe $B(\vec{x},t)$ ab.

Ende Woche 15