Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik Vorlesungszusammenfassung WS 2011/12

Andreas Müller-Rettkowski
e-mail: andreas.mueller-rettkowski@kit.edu

LaTeX: Christina Hägele

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze. Der Besuch der Vorlesung ist hierdurch nicht zu ersetzen: In der Vorlesung wird erklärt, begründet, veranschaulicht und eingeordnet.

Inhaltsverzeichnis

1.Teil Zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

1 Beispiele. Grundlegende Begriffe.

1.1 Beispiele

1) radioaktiver Zerfall

2) Schwingungsgleichung

3) mathematisches Schwerependel

4) Wachstumsmodell

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL). Begriffe.

$H : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$
$(x, y, p_1, \ldots, p_n) \to H(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ sei eine Funktion.

$$H(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

heißt GDGL n-ter Ordnung.

Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : J$ (Intervall) $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$x \to \varphi(x)$ mit

$$H(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,\ x \in J$$

heißt **Lösung der DGL (1) auf J.**

Hat man $H(x, y, p_1, \ldots, p_n) = p_n - F(x, y, p_1, \ldots, p_{n-1})$, so heißt die zugehörige DGL

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

explizit.

1.3 Bemerkung zum geometrischen Aspekt einer GDGL im Fall $n = 1$.

Das einer GDGL $H(x, y, y') = 0$ zugeordnete Richtungsfeld. Und was das für das Lösen der DGL bedeutet.

2 Einfache integrierbare Typen von GDGLn.

2.1 Die DGL mit getrennten Variablen

$f : I_1 \to \mathbb{R},\ g : I_2 \to \mathbb{R}$ $\quad (I_1, I_2$ reelle Intervalle) sind gegebene stetige Funktionen. Es liegt die DGL

$$y' = f(x)g(y),\ \ x \in I \text{ (Intervall)} \subset I_1 \tag{1}$$

vor.

Satz 1

a) Sind $y_1, y_2, \ldots$ die Nullstellen von g, so sind die konstanten Funktionen $y = \varphi(x) = y_j,\ x \in I,\ j = 1, 2, \ldots$ Lösungen von (1).

b) Ist $g(t) \neq 0$ für $t \in J \subset I_2$ (J etwa (y_1, y_2)), so wird jede Lösung $y = \varphi(x),\ x \in I$ mit $\varphi(I) \subset J$, der DGL (1) implizit durch

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_c^x f(t)\,dt,\ x \in I, \tag{2}$$

gegeben. Hierbei ist $c \in I$ eine beliebige Konstante.

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t)\,dt,\ x \in I,$$

ist eine Darstellung der Lösung durch (x_0, y_0).

2.2 Beispiele

1)Die lineare homogene DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x)y,\ x \in I. \tag{3}$$

Satz 2 (Die allgemeine Lösung von (3)) Es sei $f \in C(I)$ (stetig auf I). Jede Lösung der DGL (3) ist durch

$$y = \varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right),\ x \in I,$$

mit beliebigem $x_0 \in I$ und einer beliebigen Konstanten c gegeben. Die Lösung durch den Punkt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ ist

$$y = \varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right),\ x \in I.$$

2)Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),\ \ (x \neq 0). \tag{4}$$

Mittels der Substitution "$y \to u := \frac{y}{x}$" wird die DGL (4) umgeschrieben in eine DGL für u. Diese ist vom Typ 2.1 und kann gemäß Satz 1 gelöst werden. Dann wird die Substitution rückgängig gemacht: "$u \to y = xu$".

Beispiel $x^2y' = x^2 + xy + y^2, \;\; x \neq 0.$

2.3 Die DGL vom Bernoulli Typ

$$y' + h(x)y = q(x)y^\alpha, \;\; x \in I. \tag{5}$$

Hier sind $h,\ q \in C(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

Es wird $\alpha \neq 1$ vorausgesetzt. (Warum ist das keine Einschränkung?)
Durch Multiplikation von (5) mit $\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x h(t)\,dt\right), \quad x \in I$, wird (5) geschrieben als DGL vom Typ 2.1 für μy (wobei y (5) löst). Man erhält als Lösung (mit beliebigem $x_0 \in I$)

$$y = \varphi(x) = (\mu(x))^{-1}\left(\varphi(x_0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^x q(t)\mu(t)^{1-\alpha}dt\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; x \in I.$$

2.4 Die lineare inhomogene DGL 1.Ordnung

$$y' + h(x)y = q(x), \; x \in I, \tag{6}$$

erhält man aus 2.3, wenn man dort $\alpha = 0$ setzt.

Mit $y_0(x) := \exp\left(-\int_{x_0}^x h(t)\,dt\right)$ ist gemäß Satz 2 durch cy_0 mit beliebigen Konstanten c die allgemeine Lösung von $y' + h(x)y = 0$ (der (6) zugeordneten homogenen Gleichung) gegeben.

Satz 3 (Die allgemeine Lösung von (6))

a) y_p mit $y_p(x) = \left(\int_{x_0}^x \frac{q(t)}{y_0(t)}\,dt\right) y_0(x), \;\; x \in I$, ist eine Lösung von (6).

b) Ist $y = \varphi(x)$ eine Lösung von (6), so gilt

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)y_0(x) + y_p(x), \; x \in I.$$

c) Für jede Konstante c ist $\varphi(x) = cy_0(x) + y_p(x)$ Lösung von (6).

Beispiel

$$\frac{y'}{y} = x\ln(y) + 2x, \;\; y > 0.$$

3 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Die Lipschitz-Bedingung.

3.1 Das Problem. Die Voraussetzungen.

Es liegt vor das **Anfangswertproblem (AWP)**

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

mit den folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungen:

Mit $I_1 = \{x| \; |x - x_0| \leq \alpha\}, \; I_2 = \{y| \; |y - y_0| \leq \beta\}$ und $R = I_1 \times I_2$ sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig.
$M := \max\{|f(x, y)| \; |(x, y) \in R\}$.

Gesucht ist eine Lösung durch (x_0, y_0) : also eine stetig diff'bare Funktion $\varphi : I \subset I_1 \to I_2$ ($x_0 \in I$) mit $(x, \varphi(x)) \in R$ für $x \in I$ und

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \; x \in I \text{ und } \varphi(x_0) = y_0. \tag{2}$$

3.2 Behandlung des Problems

<u>1. Schritt</u>

Satz 1

a) Ist $\varphi : I \to I_2$ Lösung von (1), so gilt

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) \, dt, \; x \in I. \tag{3}$$

b) Ist $\varphi \in C(I)$ Lösung von (3), so ist φ Lösung von (1).

Definition (Lipschitz-Bedingung) $f : R \to \mathbb{R}$ genügt auf R einer Lipschitz-Bedingung, falls es eine Konstante $L > 0$ so gibt, dass für alle $(x, y), \; (x, \tilde{y}) \in R$

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$$

gilt.

<u>2. Schritt</u>

Satz 2 (Eindeutigkeitssatz) $f \in C(R)$ und f genüge auf R einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L. $\varphi, \psi : I_1 \to I_2$ seien Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$. Es existiere ein x_1 im Innern von I_1, für das $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ gilt. Dann hat man $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I_1$.

3. Schritt

Satz 3 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz) f, M, α, β seien wie unter 3.1, (1). f genüge in R einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L. Dann gibt es auf $I_\delta(x_0) = \{x| \; |x - x_0| \le \delta\}, \; \delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$, genau eine Lösung φ des AWP

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Zum Beweis

Die zu (1) äquivalente Integralgleichung (3) (Satz 1) wird iterativ (Picard Iteration) gelöst.

Definiere $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ... : I_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ rekursiv so:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &:= y_0, \\
\varphi_{n+1}(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t)) \, dt, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Es gelten:

1. Die Funktionen (4) sind wohldefiniert.
2. Die Folge (φ_n) ist auf $I_\delta(x_0)$ konvergent: es gibt $\varphi : I_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(x) \to \varphi(x) \;\; (n \to \infty)$ für $x \in I_\delta(x_0)$.
3. $\varphi \in C(I_\delta(x_0))$ und $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) \, dt, \; |x - x_0| \le \delta$.

3.3 Anmerkungen. Beispiele.

1. $$y' = 3y^{2/3}, \;\; y(x_0) = 0$$

   Das Problem hat viele Lösungen.

2. $$y' = 2 \cdot 10^6 x y^2, \;\; y(0) = 1.$$

   Die rechte Seite der DGL ist $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Trotzdem existiert die Lösung nur für $|x| < 10^{-3}$.

3. $$y' = y^2 + x^2, \;\; y(0) = \alpha > 0.$$

   Die Lösung existiert höchstens für $x < \frac{1}{\alpha}$.

4 Implizite DGLn.

4.1 $F(x, y, y') = 0$

Voraussetzung

(1) Es ist $F = F(x, y, p) \in C^1(G),\ G \subset \mathbb{R}^3$, mit $D_3F(x, y, p) \neq 0$ für $(x, y, p) \in G$ gegeben.

(2) Gesucht ist $y = \varphi(x),\ \varphi \in C^1(J)$ derart, dass für $x \in J\ \ (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G$ gilt und für alle $x \in J$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

erfüllt ist.

Beispiele $(f, g, h, H, G$ sind gegebene Funktionen)

$x = H(y, y'),\ y = G(x, y'),\ x = h(y'),\ y = g(y')$

$y = xf(y') + g(y')$	Lagrange oder d'Alembert Gleichung
$y = xy' + g(y')$	Clairaut DGL

Satz 1 Gibt es Konstanten a, b derart, dass

$$F(x, ax + b, a) = 0 \quad \text{für alle } x \in J \tag{3}$$

erfüllt ist, so sind $y = \varphi(x) = ax + b,\ x \in J$, Lösungen der DGL $F(x, y, y') = 0$.

Beispiele

1) $y = xy' + g(y')$

2) $y = y' + (y')^2$

3) $y = xf(y') + g(y')$

Satz 2

$$x = \psi(t),\ y = \chi(t)\ \ (t \in I)\ \ -\psi, \chi \in C^1(I)-$$

ist die Parameterdarstellung einer von einer Geraden verschiedenen Lösung der DGL $F(x, y, y') = 0$, falls

$$F(\psi(t), \chi(t), t) = 0, \qquad t \in J, \tag{4}$$

$$\dot{\chi}(t) = t \cdot \dot{\psi}(t), \qquad t \in J, \tag{5}$$

erfüllt sind.

Beispiele

1) $y = x(y')^2 + y'$

2) $y = y' + (y')^2,\ \ y(1) = 2$

4.2 $\phi(y, y', y'') = 0$

Beispiele

1) $y''(x) + c\sin(y(x)) = 0 \quad (c \text{ konstant})$

2) $\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r^2(t)}, \;\; r(0) = R, \; \dot{r}(0) = v_0$

3) $y''(x) + p\,(y'(x))^2 + q\sin(y(x)) = 0 \;\; (p > 0, q > 0 \text{ konstant})$

Satz 3 Es sei $p = p(t)$ Lösung der Gleichung

$$\phi(t,\; p(t),\; \dot{p}(t)p(t)) = 0.$$

Genügt dann $y = \varphi(x)$ der DGL $y' = p(y)$, so ist $y = \varphi(x)$ Lösung der DGL $\phi(y, y', y'') = 0$.

Beispiel

$$y'' = yy' + (y')^2, \;\; y(1) = 0, \;\; y'(1) = -1$$

5 Exakte DGLn

5.1 Erinnerungen an HM II

1) Kettenregel, Potentialfeld

2) **Satz (Satz 4, Abschnitt 38.3)** Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Es gilt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2,\ \vec{v} \in C^1(D)$, ist genau dann auf D ein Potentialfeld, wenn auf $D \quad D_2 v_1 = D_1 v_2$ erfüllt ist.

5.2 Die DGL $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$. Exaktheit.

Bedeutung der Schreibweise

$$f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy = 0 \tag{1}$$

für eine DGL und wie hier die DGL $y' = F(x,y)$ enthalten ist.

Voraussetzungen für dieses Kapitel:
$D \subset \mathbb{R}^2$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f,\ g \in C^1(D)$ und $f^2(x,y) + g^2(x,y) \neq 0$ für $(x,y) \in D$. (2)

Definition Die DGL (1) heißt **exakt in** D, falls in D

$$D_2 f = D_1 g$$

gilt.

5.3 Lösen exakter DGLn

Satz 1 Es sei die DGL (1) mit den unter (2) formulierten Voraussetzungen in D exakt, und H sei ein Potential in D für das Vektorfeld $\vec{v} := \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Dann sind alle Lösungen von (1) implizit durch $H(x,y) = c$ (c beliebig, konstant) gegeben. (Die Lösungen sind die Höhenlinien des Potentials.)

Beispiele

1) $y' = p(x)q(y)$ (siehe 2.1 / DGL mit getrennten Variablen)

2) $\frac{y}{x^2+y^2} - \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) y' = 0$

5.4 Der integrierende Faktor

Es liegt die DGL (Abschnitt 5.2)

$$f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

mit den dort formulierten Voraussetzungen (2) vor. **Die DGL (1) sei nicht exakt.**

Definition Eine C^1- Funktion $\mu = \mu(x,y) \quad (\neq 0$ in $D)$ heißt **integrierender Faktor** für (1), falls die zu (1) äquivalente DGL

$$(\mu f)(x,y)\,dx + (\mu g)(x,y)\,dy = 0 \tag{3}$$

in D exakt ist, falls also μ der folgenden partiellen DGL genügt:

$$D_2(\mu f) = D_1(\mu g) \qquad \text{in } D. \tag{4}$$

Mit geeigneten Ansätzen kann man die Lösung von (4) auf die Lösung gewisser GDGLn zurückführen. Etwa, wenn man fordert, dass μ eine spezielle Form hat, wie z.B. $\mu = \mu(x),\ \mu = \mu(y),\ \mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right),\ \mu = \mu(x^2+y^2), \ldots$

Beispiele

1) Die lineare inhomogene Gleichung 1. Ordnung (Abschnitt 2.4).

2) $y - (x^2+y^2+x)y' = 0$ (Beispiel 2), 5.3)

6 Lineare DGLn n-ter Ordnung

6.1 Definitionen. Problemformulierung.

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $p_1, \ldots, p_n,\ r \in C(J)$ sind gegebene Funktionen. Mit D wird der Operator der Differentiation bezeichnet: $Dy := y',\ y \in C^1(J)$.
$D^j y = D(D^{j-1}y),\ D^0 y = y\ \ (j \in \mathbb{N})$.

$$L : C^n(J) \to C(J)$$

mit

$$L := D^n + \sum_{j=1}^{n} p_j D^{n-j}$$

heißt **linearer Differentialoperator der Ordnung n.**

Erinnerung **Linearität** bedeutet: (vgl. 19.1)

$$\begin{aligned} &L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), && y_1,\ y_2 \in C^n(J) \\ &L(cy) = cL(y), && c \in \mathbb{R}\ \text{ konstant}, y \in C^n(J) \end{aligned}$$

Gesucht sind alle Lösungen **(die allgemeine Lösung)** y der Gleichung

$$Ly = r \qquad \text{auf } J.\ \text{(Lineare DGL der Ordnung } n) \tag{1}$$

Ist $r \neq 0$, so heißt die Gleichung (1) **inhomogen.** Die Gleichung $Ly = 0$ ist die zu (1) gehörende **homogene Gleichung.** Die allgemeine Lösung von (1) werden wir auch durch $\mathcal{L}_r$ bezeichnen:

$$\mathcal{L}_r := \{\, y \in C^n(J) \mid (Ly)(x) = r(x),\ \ x \in J \,\}.$$

Hiermit bezeichnet $\mathcal{L}_0$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.
Mit HM II schreiben wir für $\mathcal{L}_0$ auch Kern(L). Wir erinnern daran, dass $\mathcal{L}_0$ ein Vektorraum ist: ein Teilraum des Vektorraumes $C^n(J)$. Wir erinnern an den Dimensionssatz aus HM II (19.2, Satz 3):

Sind V, W Vektorräume, ist $\dim(V)$ endlich und ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$

6.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz 1 Es seien $p_1, \ldots, p_n \in C(J)$ und L der lineare Differentialoperator

$$L = D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \ldots + p_n.$$

Es gilt:
Zu $x_0 \in J$ und Zahlen $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Funktion $f \in C^n(J)$, die auf J der homogenen DGL $L(y) = 0$ und den Anfangsbedingungen $f^{(j)}(x_0) = k_j,\ j = 0, 1, \ldots, n-1$ genügt.

Folgerung: Das Problem $L(f) = 0$ auf J, $f^{(j)}(x_0) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, hat nur die triviale Lösung $f = 0$.

6.3 Die homogene Gleichung

Satz 2 Für $L : C^n(J) \to C(J)$, $L = D^n + \sum_{j=1}^{n} p_j D^{n-j}$ gilt

$$\dim \operatorname{Kern}(L) \, (= \dim(\mathcal{L}_0)) = n.$$

Satz 3 Es sei L ein linearer Differentialoperator der Ordnung n. Sind $u_1, u_2, \dots, u_n$ l.u. Lösungen der homogenen DGL $L(y) = 0$ auf J, so kann jede Lösung $y = f(x)$, $x \in J$, in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \tag{2}$$

mit geeigneten Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$ geschrieben werden.

Bemerkung $\{ \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \}$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L(y) = 0$.
Sind die p_j in L konstant, so nennen wir L einen **KK-Operator.** Für KK-Operatoren kann man $\operatorname{Kern}(L)$ bestimmen.

6.4 Rechnen mit KK-Operatoren

Es liegt vor $A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$ mit <u>konstanten</u> reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ und $a_0 \neq 0$. A heißt **KK-Operator.** Wir betrachten im Folgenden die KK-Operatoren auf $C^\infty(J)$

$$A : C^\infty(J) \to C^\infty(J), \text{ linear.}$$

6.4.1

Es seien $A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$ $(a_0 \neq 0)$, $B = \sum_{j=0}^{m} b_j D^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$ zwei KK-Operatoren und λ eine Konstante. Es können $A + B$, λA, AB gebildet werden. Wegen $D^r D^s = D^s D^r$ $(r, s \in \mathbb{N})$ gilt $AB = BA$.

6.4.2

Dem KK-Operator A wird sein **charakteristisches Polynom** p_A zugeordnet:

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j} \to p_A(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Diese Zuordnung ist bijektiv und mit den oben (6.4.1) beschriebenen Operationen verträglich:

Satz 4 Es seien A, B KK-Operatoren mit den charakteristischen Polynomen p_A, p_B. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelten:

(a) $A = B \Leftrightarrow p_A = p_B$,

(b) $p_{A+B} = p_A + p_B$,

(c) $p_{AB} = p_A p_B$,

(d) $p_{\lambda A} = \lambda p_A$.

Zur Bedeutung des charakteristischen Polynoms der folgende Satz:

Satz 5 Mit $A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$, a_j konstant, gelten:

(a) $A(e^{kx}) = e^{kx} p_A(k)$ $\quad$ (k konstant)

(b) $A(x^l e^{kx}) = e^{kx} \sum_{j=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} x^{l-j} p_A^{(j)}(k)$, $l \in \mathbb{N}$, k konstant.
Hieraus ergibt sich:

(c) Für $m \in \mathbb{N}$, r konstant und $A = (D - r\mathrm{id})^m$ gilt:
$A(x^l e^{rx}) = 0$ für $l = 0, 1, \ldots, m-1$.

6.5 Bestimmung einer Lösungsbasis für $Ly = 0$ mit einem KK-Operator L.

Für das Folgende beachte man: Aus Satz 4, (a), (c) folgt:
Für $p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ hat man:

$$p = p_A \text{ mit } A = a_0(D - x_1\mathrm{id})(D - x_2\mathrm{id}) \cdots (D - x_n\mathrm{id}).$$

Satz 6 Es sei L ein KK-Operator, der als Produkt von KK-Operatoren $A_1, \ldots, A_k$

$$L = A_1 A_2 A_3 \cdots A_k$$

geschrieben werden kann. Es gilt: $\mathrm{Kern}(A_j) \subset \mathrm{Kern}(L)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

(Der Lösungsraum von $L(y) = 0$ enthält den Lösungsraum von $A_j(y) = 0$ für jedes j.)

<u>Lösung von $L(y) = 0$.</u> $\quad L = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$, a_j konstant, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

1. <u>p_L hat n verschiedene reelle Nullstellen</u>

Satz 7 $p_L(r_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. $r_j \neq r_l$ $(j \neq l)$. Dann wird die allgemeine Lösung der Gleichung $L(y) = 0$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x}$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gegeben.

2. p_L hat mehrfache reelle Nullstellen

 Satz 8 Die m Funktionen $u_j(x) = x^j e^{rx},\ j = 0, 1, \ldots, m-1$ sind l.u. Lösungen der Gleichung $(D - r\mathrm{id})^m(y) = 0$ (Beachte Satz 5 (c)).

 Wir fassen zusammen:

 Satz 9 $Ly = 0$ sei eine lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. p_L habe die verschiedenen reellen Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_k \quad (m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$. Dann ist $u_{q,p}:\ u_{q,p}(x) = x^{q-1}e^{r_p x},\ q = 1, \ldots, m_p,\ p = 1, 2, \ldots, k$ eine Basis des Lösungsraumes von $L(y) = 0$.

3. p_L hat komplexe Nullstellen

 Man kann alles wie vorher mit der komplexen e-Funktion durchführen. Die Lösungen sind dann komplexwertig. Werden reelle Lösungen verlangt, so verwendet man:

 Satz 10 Ist $\alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ eine Nullstelle der Ordnung m von p_L, so ist $\alpha - i\beta$ ebenfalls eine Nullstelle der Ordnung m, und der zugehörige reelle Operator in der Faktorisierung von L ist

$$A = (D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\mathrm{id})^m.$$

 Der Lösungsraum von $A(y) = 0$ hat die reelle Basis u_q, v_q :
 $u_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad v_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad q = 1, 2, \ldots, m$

6.6 Wie die homogene und die inhomogene Gleichung zusammenhängen.

Satz 11 Es sei $L : C^n(J) \to C(J)$ ein linearer Differentialoperator n-ter Ordnung (wie in 6.1) mit variablen stetigen Koeffizienten $p_j \in C(J)$; $r \in C(J)$. Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eine Basis des Lösungsraumes von $L(y) = 0$. Es sei y_p eine Lösung von $L(y) = r$. Dann hat jede Lösung $y = f(x)$ der Gleichung $L(y) = r$ die Form

$$f(x) = y_p(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x),\ x \in J,$$

wobei $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Konstanten sind.

Bemerkungen

1) Vergleiche mit Satz 3/ 6.3 .

2) $\{y_p + \sum_{j=1}^n c_j u_j \mid c_j \text{ konstant}\}$ ist die allgemeine Lösung von $Ly = r$. Mit den Bezeichnungen aus 6.1 können wir Satz 11 auch übersichtlich so schreiben:

$$\mathcal{L}_r = y_p + \mathcal{L}_0.$$

Zur Lösung von $Ly = r$ sind also gemäß Satz 11 die zwei folgenden Probleme zu behandeln:
P 1. Berechne die allgemeine Lösung von $L(y) = 0$: Berechne $\mathcal{L}_0$.
P 2. Berechne eine Lösung y_p von $L(y) = r$.

6.7 Berechnung von y_p. Variation der Konstanten.

P 2. ist lösbar, wenn **P 1.** gelöst ist. Gegeben sind n l.u. Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von $L(y) = 0$. Es wird y_p mit $L(y) = r$ wie folgt bestimmt:

Variation der Konstanten Ansatz für y_p :
Berechne n Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ so, dass $y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n$ Lösung von $Ly = r$ auf J wird. Wir fassen $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ zu den Vektorfunktionen $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ zusammen.

Der Ansatz für y_p lautet somit: $\vec{v} : J \to \mathbb{R}^n$ ist so zu berechnen, dass $y_p = \vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathcal{L}_r$ gilt.

Satz 12 Ist $\vec{v} = \vec{v}(x)$ Lösung des Gleichungssystems:

$$(3) \quad \begin{cases} \vec{v}' \cdot \vec{u} & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}' & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}'' & = 0 \\ \vdots & \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}^{(n-2)} & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}^{(n-1)} & = r, \end{cases}$$

so gilt $L(\vec{v} \cdot \vec{u}) = r$ auf J.

Definition (Wronski-Matrix von $\vec{u}$ / von $u_1, \ldots, u_n$)
Die (n, n)-Matrix, deren j-te Zeile $(j = 1, \ldots, n)$ $(\vec{u}^{(j-1)})^T$ ist, wird durch $W(x,\ \vec{u})$ bezeichnet und **Wronski-Matrix von** $\vec{u}$ genannt. Hiermit lässt sich (3) in Matrixform so schreiben:

$$W(x, \vec{u})\, \vec{v}'(x) = r(x)\, \vec{e}_n, \quad x \in J \tag{4}$$

(mit $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$)

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass W für jedes $x \in J$ regulär ist. Hiermit folgt aus (4)

$$\vec{v}(x) = \vec{v}(c) + \int_c^x r(t) \Big(W(t, \vec{u}) \Big)^{-1} \vec{e}_n \; dt, \quad x, c \in J.$$

Satz 13 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seien n l.u. Lösungen der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung $L(y) = 0$ auf J. Eine Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $L(y) = r$ auf J wird durch $y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x) v_j(x)$

mit $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}(x) = \int_c^x r(t) \Big(W(t, \vec{u}) \Big)^{-1} \vec{e}_n \, dt, \; x \in J$, gegeben.

Hier ist $c \in J$ beliebig und $W(t, \vec{u})$ die Wronski-Matrix der Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

6.8 Regularität der Wronski-Matrix

Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n l.u. Lösungen von $L(y) = 0$ und $\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j$. Es gelten also $L(u_j) = u_j^{(n)} + p_1(x) u_j^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) u_j = 0, \; j = 1, \ldots, n$.

Setze $w(x) = \det\Big(W(x, \vec{u}) \Big) = \det\big(\vec{u}(x), \; \vec{u}'(x), \ldots, \vec{u}^{(n-1)}(x) \big)$.

Satz 14 Es gilt $w'(x) + p_1(x) w(x) = 0, \; x \in J$. Somit folgt für $c \in J$

$$w(x) = w(c) \exp\left(- \int_c^x p_1(t) \, dt \right), \; x \in J.$$

Man hat $w(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.

7 Lineare DGLn 2.Ordnung

7.1

Man gehe das 6. Kapitel mit $n = 2$ durch.

7.2 Reduktion der Ordnung

Satz Es sei $u \in \mathcal{L}_0,\ u \neq 0$. Ist v die allgemeine Lösung der Gleichung

$$v'' + v'\left(2 \cdot \frac{u'}{u} + p_1\right) = \frac{r(x)}{u(x)},\ x \in J,$$

so ist $y = uv$ die allgemeine Lösung von $L(y) = r$.

Bemerkungen

1) Diesen Satz kann man für lineare Gleichungen beliebiger Ordnung formulieren. (?)

2) Vergleiche mit dem Abschnitt: Variation der Konstanten. (6.7)

7.3 Beispiele

1) $y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin x$

2) $y''(x) + (1 - x^2)\, y(x) = 0$

7.4 Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$a,\ b$ seien reelle Konstanten; $r \in C(\mathbb{R})$. Gesucht sind alle Lösungen von

$$(Ly)(x) = y'' + 2ay' + by = r(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1. Schritt (6.6, P 1.)

Gesucht sind zwei l.u. Lösungen von $u_1,\ u_2$ von $y'' + 2ay' + by = 0$

<u>1.Fall</u> $a^2 > b$

$$u_1(x) = e^{-ax} e^{\sqrt{d}x}$$
$$u_2(x) = e^{-ax} e^{-\sqrt{d}x}$$

mit $d = a^2 - b$.

<u>2.Fall</u> $a^2 = b$

$$u_1(x) = e^{-ax}$$
$$u_2(x) = xe^{-ax}$$

3.Fall $a^2 < b$

$$u_1(x) = e^{-ax}e^{i\omega x}$$
$$u_2(x) = e^{-ax}e^{-i\omega x}$$

mit $\omega = \sqrt{-d}$ oder zwei reelle l.u. Lösungen

$$\tilde{u}_1(x) = e^{-ax}\cos\omega x$$

$$\tilde{u}_2(x) = e^{-ax}\sin\omega x$$

2. Schritt (6.6, P 2.)

$$Ly = r \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

a) Mit dem Satz aus 7.2 oder

b) mit Variation der Konstanten oder

c) mit Laplace Transformation (HM II).

Beispiel

$$y'' + 2ay' + by = f_0\cos\omega_1 x \tag{2}$$

$y,\ a,\ b,\ f_0,\ \omega_1$ reell

$\tilde{y}$ sei Lösung von

$$y'' + 2ay' + by = f_0 e^{i\omega_1 x}. \tag{3}$$

Dann ist $y = \mathrm{Re}(\tilde{y})$ Lösung von (2). Zur Lösung von (3) mache den Ansatz

$$\tilde{y}(x) = \alpha e^{i\omega_1 x} = |\alpha| e^{i(\omega_1 x - \varphi)}.$$

Zu berechnen sind $|\alpha|$ und φ.

7.5 Die DGL vom Eulerschen Typ

Die DGL

$$x^2y'' + 2axy' + by = r(x), \quad x \neq 0 \tag{1}$$

mit konstantem a und b lässt sich auf (1) aus 7.4 zurückführen.

a) Ist $y = \varphi(x)$ für $x > 0$ Lösung von (1), so ist $\phi(t) := \varphi(e^t)$ Lösung von

$$\ddot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t) + 2a\dot{\phi}(t) + b\phi(t) = r(e^t) \tag{2}$$

Diese Gleichung ist vom Typ (1) aus 7.4. Aus $\phi(t)$ erhält man dann die Lösung φ für $x > 0$ gemäß

$$\varphi(x) = \phi(\ln x)$$

b) Im Fall $x < 0$ sind entsprechend die folgenden Substitutionen durchzuführen:

$$\begin{aligned} x &\to t := \ln(-x) \\ t &\to x = -e^t \\ r(x) &\to r(-e^t) \\ \varphi(x) &\to \phi(t) = \varphi(-e^t) \end{aligned}$$

Übung:

1) Wie sieht in diesem Fall die zu (2) analoge Gleichung aus?

2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$

3) $x^2y'' + xy' - y = \ln|x|,\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$

8 Lösung mit Potenzreihen

(Methode von Frobenius, verallgemeinerter Potenzreihenansatz)

8.1 Der Ausgangspunkt. Beispiele.

1) Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$(Ly)(x) = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \neq 0 \tag{7}$$

wobei $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j,\ q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen mit reellen Koeffizienten $p_j,\ q_j$ sind.
$x = 0$ heißt **Stelle der Bestimmtheit** oder **reguläre singuläre Stelle der DGL.**

Bemerkung $(x - x_0)^2y'' + (x - x_0)p(x - x_0)y' + q(x - x_0)y = 0, \quad x \neq x_0$
Hier ist x_0 Stelle der Bestimmtheit. Durch Translation kann diese Gleichung leicht in die Form (1) gebracht werden.

2) Beispiele aus der Physik, die hierher gehören: Legendre-, Bessel-, Laguerre-, Hermite-DGL und ähnliche.

3) Die einfachste Gleichung der Form (1) ist die Eulersche DGL

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \quad (a, b \text{ konstant}),\ x \neq 0$$

(siehe 7.5) Anstelle des dort besprochenen Lösungsvorgehens kann man zur Lösung auch den Ansatz $y = \varphi(x) = |x|^{\varrho}$ mit zu berechnendem ϱ machen. Dies ist der einfachste Fall des im Folgenden beschriebenen verallgemeinerten Potenzreihenansatzes.

8.2 Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz

Zur Lösung von

$$(Ly)(x) = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \text{ für } x > 0 \text{ und } x < 0 \tag{1}$$

Es wird $x > 0$ **betrachtet.** $x < 0$ geht analog.

Ansatz

$$y(x, \varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\varrho} \text{ für } x > 0 \tag{2}$$

(für $x < 0:\ y(x, \varrho) = (-x)^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$) mit aus der DGL zu berechnenden c_k und ϱ. Geht man mit dem Ansatz in die DGL ein, so erhält man

$$Ly = x^{\varrho} f(\varrho)c_0 + x^{\varrho} \sum_{k=1}^{\infty} \Big[f(\varrho + k)c_k + \sum_{m=0}^{k-1} \Big((m + \varrho)p_{k-m} + q_{k-m} \Big) c_m \Big] x^k = 0 \tag{3}$$

mit $f(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0$. Koeffizientenvergleich ergibt:

$$f(\varrho)c_0 = 0 \tag{4}$$

$$f(\varrho + k)c_k = -\sum_{m=0}^{k-1} \Big((m+\varrho)p_{k-m} + q_{k-m}\Big)c_m =: g_k(\varrho), \quad k = 1, 2, \dots \tag{5}$$

8.3 Zur Berechnung der c_k und ϱ

Wir vermerken, dass die c_k von ϱ abhängen, durch die Schreibweise $c_k = c_k(\varrho)$. Im Fall $f(\varrho + k) \neq 0$ lassen sich die c_k aus der Rekursionsformel (5) berechnen. Bereichnet man die Nullstellen von $f(\varrho)$ durch ϱ_1, ϱ_2, so erhält man

$$Ly = c_0(\varrho)(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)x^\varrho \quad \big(= c_0 f(\varrho)x^\varrho\big) \tag{6}$$

mit y aus (2) und den c_k aus (5).

Da jedes c_k ein Vielfaches von c_0 ist, besagt (6), dass $Ly = 0$ mit nichttrivialer Lösung y gilt für $\varrho = \varrho_1$ oder $\varrho = \varrho_2$. Mit ϱ_j werden aus (5) $c_k(\varrho_j)$ und hiermit $y_j = y(x, \varrho_j)$ berechnet.

Es sind also zunächst die Nullstellen von f zu berechnen, die sog.
Indexgleichung $\mathbf{f}(\varrho) = \mathbf{0}$ ist zu lösen.

8.4 Der reguläre Fall $p_0 = q_0 = q_1 = 0$

bedeutet, dass
$\frac{1}{x^2}L(y) = y'' + (p_1 + p_2 x + \dots)y' + (q_2 + q_3 x + \dots)y$ wird.
$\Big(\frac{1}{x^2}Ly$ hat die Form von Ly aus 6.1 für $n = 2\Big)$

Hier sind $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$. Man erhält mit $c_0 = 1$
in $y_1(x) = y(x,1) = x + c_1x^2 + c_2x^3 + \dots \quad \big(y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1\big)$
und $y_2(x) = y(x,0) = 1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad \big(y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = 0\big)$
zwei Potenzreihen, die l.u. Lösungen für $Ly = 0$ für $x \neq 0$ darstellen.

Fazit: Im regulären Fall führt der "normale" Potenzreihenansatz zum Ziel. Zur Übung behandle nochmals Beispiel 2), 7.3.

8.5 Ab jetzt liegt der Fall $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ vor.

In diesem Fall ist zugelassen (im Unterschied zum 6. Kapitel. Siehe die Voraussetzungen in 6.1), dass die Koeffizienten von

$$\frac{1}{x^2}L(y) = y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y$$

bei y' eine Polstelle 1. Ordnung,
bei y eine Polstelle 2. Ordnung haben dürfen.

1) $\boldsymbol{\varrho_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\boldsymbol{\varrho_2} = \boldsymbol{\bar{\varrho}_1}$.
Mit $c_0(\varrho_1)\big(= c_0(\varrho_2)\big) = 1$ und $c_k(\varrho_1)$ $\big($ bzw. $c_k(\varrho_2)\big)$ aus (5) berechnet man $y(x, \varrho_1)$.

$$y_1(x) = \operatorname{Re} y(x, \varrho_1)$$

$$y_2(x) = \operatorname{Im} y(x, \varrho_1) \ \big(= -\operatorname{Im} y(x, \varrho_2)\big)$$

sind für $0 < x < R$ reelle l.u. Lösungen von $Ly = 0$.

Beispiel: $x^2 y'' + xy' + y = 0$

2) **Ab jetzt sind $\boldsymbol{\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}}$ mit $\boldsymbol{\varrho_1 \geq \varrho_2}$.**

a) $\boldsymbol{\varrho_1} > \boldsymbol{\varrho_2}$, $\boldsymbol{\varrho_1} - \boldsymbol{\varrho_2} \notin \mathbb{N}$
Mit $c_0 = 1$ sind für ϱ_1 die $c_k(\varrho_1)$ für $k = 1, 2, \ldots$ und für ϱ_2 die $c_k(\varrho_2)$ für $k = 1, 2, \ldots$ aus (5) berechenbar. Man ehält zwei l.u. Lösungen für $L(y) = 0$:

$$y_1(x) = y(x, \varrho_1), \quad y_2(x) = y(x, \varrho_2).$$

b) $\boldsymbol{\varrho_1} = \boldsymbol{\varrho_2}$
Hier gilt $f(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)^2$. Es ist $f(\varrho_1 + k) = k^2 \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Wir setzen $c_0 = 1$. Dann können aus (5) die Koeffizienten $c_k(\varrho_1)$ berechnet werden. Man erhält eine Lösung
$y_1(x) = y(x, \varrho_1) = x^{\varrho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k = x^{\varrho_1}\big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k\big)$,
$0 < x < R$.
Eine hiervon l.u. Lösung kann man etwa so erhalten: Mit den $c_k(\varrho)$ aus (5), $c_0(\varrho) = 1$, gilt für

$$y(x, \varrho) = x^{\varrho}\big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k\big)$$

$$Ly = x^{\varrho}(\varrho - \varrho_1)^2 \quad \text{(siehe (6))}.$$

Differenziere diese Gleichung nach ϱ :

$$\partial_\varrho L(y) = L(\partial_\varrho y) = x^{\varrho} \ln x (\varrho - \varrho_1)^2 + 2(\varrho - \varrho_1) x^{\varrho}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} y_2(x) :&= \big(\partial_\varrho y(x, \varrho)\big)_{|\varrho = \varrho_1} \\ &= \ln(x) y_1(x) + x^{\varrho_1 + 1} \sum_{k=0}^{\infty} c'_{k+1}(\varrho_1) x^k \end{aligned}$$

eine zweite l.u. Lösung von $L(y) = 0$.

Beispiele: $x^2 y'' - 2xy' + \frac{9}{4} y = 0$
$xy'' + y' + xy = 0$.

c) $\boldsymbol{\varrho_1} - \boldsymbol{\varrho_2} = N \in \mathbb{N}$
Es ist $f(\varrho_1 + k) = k(k + N) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit kann man $y_1(x) = y(x, \varrho_1)$ wie vorher mit $c_0 = 1$ und (5) berechnen.

Aus (5) ist $c_N(\varrho_2)$ wegen $f(\varrho_2 + N) = 0$ i. a. nicht zu berechnen, es sei denn (siehe (5)), es gilt

$$g_N(\varrho_2) := -\sum_{m=0}^{N-1} \big((m+\varrho_2)p_{N-m} + q_{N-m}\big)c_m = 0 \tag{7}$$

Ist dies der Fall, wähle $c_N(\varrho_2)$ beliebig und berechne mit (5) alle $c_k(\varrho_2)$, $k \in \mathbb{N},\ k \neq N$, etwa mit $c_0 = 1$. Man erhält so $y_2(x) = y(x, \varrho_2)$, eine von y_1 l.u. Lösung.
Im Normalfall $\big(g_N(\varrho_2) \neq 0\big)$ liefert (5) den Widerspruch $0 = g_N(\varrho_2)$.
Wir können dann eine von y_1 l.u. Lösung y_2 so berechnen:
Wähle $c_0 = \varrho - \varrho_2$ und berechne $c_k(\varrho)$ aus (5) und bilde mit diesen c_k

$$y(x, \varrho) := x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varrho) x^k \quad (x > 0).$$

Es gilt (siehe (6)):

$$Ly = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)^2 x^\varrho$$

$$\Rightarrow \partial_\varrho (Ly)_{|\varrho=\varrho_2} = L\big(\partial_\varrho y(x,\varrho)\big)_{|\varrho=\varrho_2} = 0$$

$y_2(x) = \partial_\varrho y(x, \varrho)_{|\varrho=\varrho_2}$ ist eine zweite von y_1 l.u. Lösung. Man macht sich klar, dass mit einer Konstanten a

$$y_2(x) = x^{\varrho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k'(\varrho_2) x^k + a\big(\ln x\big) y_1(x)$$

gilt.

Bemerkung Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz $\big((2)\big)$ liefert also in jedem Fall direkt mindestens eine Lösung von (1). Grundsätzlich kann dann stets eine zweite l.u. Lösung mit dem Ansatz

$$y_2(x) = y_1(x) v(x)$$

$\big($Reduktion der Ordnung/ 7.2$\big)$ durch Berechnung von v bestimmt werden.

8.6 Zusammenfassender Satz für den Fall reeller ϱ_1, ϱ_2 und Stelle der Bestimmtheit x_0

Gegeben ist die DGL

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) p(x) y' + q(x) y = 0$$

mit

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j (x - x_0)^j,\ q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x - x_0)^j,\ |x - x_0| < R.$$

Dann gibt es für $0 < |x - x_0| < R$ definierte l.u. Lösungen $y_1,\ y_2$ der Form

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\varrho_1} u_1(x)$$

$$y_2(x) = A \cdot |x - x_0|^{\varrho_1} u_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{\varrho_2} u_2(x)$$

mit $u_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} (x - x_0)^k,\ c_0^{(j)} = 1 \quad (j = 1, 2)$.

$\varrho_1,\ \varrho_2 \quad (\varrho_1 \geq \varrho_2)$ sind die Nullstellen von $f(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0$.

Im Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ ist $A = 1$.
Im Fall $\varrho_1 - \varrho_2 \in \mathbb{N}$ kann $A = 1$ oder $A = 0$ sein.
Im Fall $\varrho_1 \neq \varrho_2,\ \varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$ ist $A = 0$.

ergänzende Literatur (auch hinsichtlich Konvergenzfragen)

Rabenstein: Introduction to Ordinary Differential Equations
Chorlton: Ordinary Differential and Difference Equations

9 Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

9.1 Das Problem. Die Vorgaben.

J ist ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\vec{q} : J \to \mathbb{R}^n$ $\big(\mathbb{C}^n\big)$ ein stetiges Vektorfeld und $P : J \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ $\big(\mathbb{C}^{(n,n)}\big)$ eine stetige matrixwertige Funktion: $P(t) = \big((P(t))_{jk}\big)$, $\big(P(t)\big)_{jk} = p_{jk}(t)$. P stetig bedeutet, dass $p_{jk} : J \to \mathbb{R}$ $\big(\mathbb{C}\big)$ für alle $j,\ k$ stetig sind.

Es seien $t_0 \in J$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ $\big(\mathbb{C}^n\big)$ fest. Gesucht ist $\vec{y} \in C^1(J),\ \vec{y} : J \to \mathbb{R}^n$ $\big(\mathbb{C}^n\big)$, mit

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Zur Übung schreibe man (1) explizit etwa für $n = 4$ mit Komponenten auf.

Satz 1 Das Problem (1) hat unter den Voraussetzungen: $P,\ \vec{q}$ stetig auf J genau eine Lösung $\vec{y}$, die auf J definiert ist.

9.2 Ein Spezialfall von (1) ist das Problem aus 6.2, Satz 1.

Es seien $r, a_1, \ldots, a_n \in C(J)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Es sei $y \in C^n(J)$ eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\, y^{(n-j)} &= r(t), \quad t \in J, \\ y^{(j)}(t_0) &= b_{j+1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{2}$$

Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : J \to \mathbb{R}^n$ durch $y_1 := y,\quad y_j := y'_{j-1}\quad (j = 2, \ldots, n)$.
Dann gilt mit

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \ldots & & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{\tilde{q}}(t) = r(t)\,\vec{e}_n, \quad \vec{\tilde{y}}_0 = \vec{b},$

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= \tilde{P}(t)\,\vec{y} + \vec{\tilde{q}}(t), \quad t \in J \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{\tilde{y}}_0 \end{aligned} \tag{3}$$

(Dies ist ein spezielles Problem (1).)

Umgekehrt hat man: Ist $\vec{y} \in C^1(J)$ Lösung von (3), so gilt für y_1 (2).
Die Theorie für Probleme (1) beinhaltet also die für Probleme (2).

Zur Übung und Erinnerung lies nochmals den Fall $n = 1$ aus Kapitel 2, 2.4. Von dort können wir den Satz über die Struktur der Lösungen von (1) übernehmen:

Satz 2 Die allgemeine Lösung von:

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \tag{4}$$

erhält man, indem man zur allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t), \quad t \in J, \tag{5}$$

eine spezielle Lösung $\vec{y}_P$ der Gleichung (4) addiert. (vgl. auch Satz 11 / 6.6)

Zum homogenen Problem:

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t), \quad t \in J, \tag{5}$$

n Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ von (5) fassen wir zu einer $(m,\, n)$-Matrix
$Y(t) = \big[\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)\big]$ zusammen und betrachten
$W(t) = W(t; \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) := \det Y(t)$. Es gilt (11. Ü, A 4)

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}\, P(s)\, ds \right).$$

Hieraus liest man ab

Satz 3 Sind $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ Lösungen des homogenen Systems (5), so gilt mit $W(t) = \det\left(\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)\right)$: $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ sind l.u. auf $J \;\Leftrightarrow\; W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$.

Satz 4

a) $\mathcal{L}_0 = \{\vec{y} : J \to \mathbb{R}^n, \; \vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t)\}$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

b) n Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ bilden genau dann eine Basis von $\mathcal{L}_0$ (ein Fundamentalsystem), wenn gilt $\det\left(\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)\right) \neq 0$ für ein (und damit für alle) $t \in J$. In diesem Fall ist $\vec{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{y}_j(t)$ $\big(c_j \in \mathbb{R}$ beliebig, konstant $\big)$ die allgemeine Lösung von (5).

9.3 Matrixfunktionen

(Wir schreiben $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{(m,n)}$. Wir könnten im Folgenden ebenso mit $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{(m,n)}$ arbeiten. Siehe auch die Formulierungen unter 9.1)

J sei ein Intervall in $\mathbb{R}$.
$P : J \to \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt Matrixfunktion. Die Elemente von $P(t)$ werden wie in HM II (siehe auch schon 9.1 hier) durch $\big(P(t)\big)_{jk}$ oder auch durch $p_{jk}(t)$ bezeichnet. Die $p_{jk} : J \to \mathbb{R}$ sind die Komponentenfunktionen. Stetigkeit, Diff'barkeit, Integrierbarkeit, Konvergenz werden über die Komponenten(funktionen) erklärt:

P ist stetig, diff'bar, integrierbar, falls p_{jk} für jedes Paar j, k stetig, diff'bar, integrierbar ist.

$P'(t)$ ist die durch $\big(P'(t)\big)_{jk} := p'_{jk}(t), \quad t \in J$, definierte (m,n)- Matrix. Analog ist $\int_a^b P(t)\,dt$ die $(m,n)-$ Matrix mit den Elementen
$\left(\int_a^b P(t)\,dt\right)_{jk} := \int_a^b p_{jk}(t)\,dt.$

Ü:

1. Sind P, $Q : J \to \mathbb{R}^{(m,n)}$ diff'bar auf J, so gilt $(P+Q)' = P' + Q'$.
2. $P : J \to \mathbb{R}^{(m,n)}$, $Q : J \to \mathbb{R}^{(n,l)}$ seien diff'bar auf J. Es gilt $\big(PQ\big)' = P'Q + PQ'$.

9.4 Reihen von Matrizen. Konvergenz. Norm.

Definition $C_1, C_2, \ldots$ sei eine Folge von (m,n)-Matrizen,
$\big(C_k\big)_{jl} = c_{jl}^{(k)}, \ j = 1, \ldots, m; \ l = 1, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots.$
$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ heißt **konvergent**, falls alle mn Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} c_{jl}^{(k)}$ konvergieren.
$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ ist dann die (m,n)-Matrix $C = (c_{jl})$ mit $c_{jl} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jl}^{(k)} \ \Big(= \big(C\big)_{jl}\Big)$.

Definition (Norm auf $\mathbb{C}^{(m,n)}$)

$$\|A\| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |(A)_{jl}|, \ A \in \mathbb{C}^{(m,n)}.$$

Satz 5

1) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad A,\, B \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

2) $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|, \quad A \in \mathbb{C}^{(m,n)},\, B \in \mathbb{C}^{(n,p)}$

3) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|, \quad \lambda \in \mathbb{C},\, A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

Folgerung Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$.

Satz 6 Es sei $\big(C_k\big)$ eine Folge von (m,n)-Matrizen. Dann gilt: Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}\|C_k\|$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}C_k$.

9.5 $\exp(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Definition Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist die (n,n)-Matrix $\exp(A)$ wie folgt definiert:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.$$

Hierbei ist $A^0 = E$. Für $\exp(A)$ wird auch e^A geschrieben.

Bemerkungen

1) $\exp(E) = eE$

2) $\|\exp(A)\| \leq \exp\big(\|A\|\big)$

3) $\exp(0) = E$

9.6 Die DGL für e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Satz 7 Für $E(t) = e^{tA}$ gelten:

$$E'(t) = E(t)A = AE(t).$$

9.7 Die Matrixdgl. $F'(t) = AF(t)$. Eindeutigkeitssatz.

Satz 8 Für jede (n,n)-Matrix A und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{tA}e^{-tA} = E.$$

Also: e^{tA} ist eine reguläre (n,n)-Matrix mit $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

Satz 9 (Eindeutigkeitssatz)
Es seien A, B konstante (n,n)-Matrizen. Dann ist F mit $F(t) = \exp(tA)B$ die einzige Matrixfunktion, für die

$$\begin{aligned} F'(t) &= AF(t), \quad t \in J, \\ F(0) &= B \end{aligned}$$

erfüllt sind.

9.8 $\exp(A)\exp(B)$

Satz 10 Für (n,n)-Matrizen A, B mit $AB = BA$ gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Folgerung

$$\exp(sA)\exp(tA) = \exp\big((s+t)A\big), \quad s,\, t \in \mathbb{R}.$$

9.9 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 11 Es seien A eine konstante (n,n)-Matrix, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$. Das AWP

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= A\,\vec{y}(t), \;\; t \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(a) &= \vec{y}_0 \end{aligned}$$

hat die Lösung $\vec{y}(t) = e^{(t-a)A}\vec{y}_0$.

9.10 Berechnen von $\exp(tA)$

1) Mit $\mathbf{A} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $\big((n,n)$-Diagonalmatrix mit den Spalten $\lambda_k \vec{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n\big)$ gilt

$$e^{tA} = \operatorname{diag}\big(e^{t\lambda_1},\, e^{t\lambda_2},\, \ldots,\, e^{t\lambda_n}\big), \;\; t \in \mathbb{R}.$$

2) A **sei diagonalisierbar.** Es gibt dann eine reguläre Matrix C derart, dass $C^{-1}AC = D$ (Diagonalmatrix) ist (vgl. HM II).
   Dann gilt:
$$e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

9.11 Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 12 Es seien A eine konstante (n,n)-Matrix, $\vec{q} : J \to \mathbb{R}^n$, $\vec{q} = \vec{q}(t)$, eine stetige Vektorfunktion, $a \in J$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Das AWP: Gesucht ist eine C^1- Vektorfunktion $\vec{y} = \vec{y}(t)$ mit

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= A\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \;\; t \in J, \\ \vec{y}(a) &= \vec{y}_0 : \end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung, die explizit durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-a)A}\vec{y}_0 + \int_a^t e^{(t-\tau)A}\vec{q}(\tau)\, d\tau, \;\; t \in J,$$

gegeben ist.

9.12 Das Problem (1) aus 9.1. Variation der Konstanten.

1) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_0 = 0$ gesetzt werden. Es liegt also das Problem

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \;\; t \in J, \\ \vec{y}(0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

   vor. (mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 9.1)

2) Das homogene Problem (1) $\left(\vec{q}=\vec{0}\right)$ besitzt n l.u. Lösungen $\vec{\phi}_1,\, \vec{\phi}_2, \ldots,\, \vec{\phi}_n$.
Die hiermit gebildete reguläre (n,n)-Matrix

$$\phi(t) := \left[\vec{\phi}_1(t),\, \vec{\phi}_2(t), \ldots,\, \vec{\phi}_n(t)\right],\quad t \in J,$$

heißt **Fundamentalmatrix** für das homogene System.

$\vec{y}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\vec{y}_0$ ist die Lösung des homogenen Problems (1):

$$\begin{aligned}\vec{y}\,'(t) &= P(t)\,\vec{y}(t),\quad t \in J,\\ \vec{y}(0) &= \vec{y}_0.\end{aligned}$$

3) **Zur Lösung des inhomogenen Problems (1)**

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist durch $\vec{y}(t) = \phi(t)\,\vec{c}$ mit einem beliebigen festen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Zur Lösung von (1) wird der Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$\vec{y}(t) = \phi(t)\,\vec{v}(t) \tag{2}$$

mit einer zu berechnenden Funktion $\vec{v}$ gemacht.
Die Forderung, dass $\vec{y}$ Lösung von (1) ist, und die Eigenschaft von ϕ : $\phi'(t) = P(t)\,\phi(t)$, ergeben $\vec{v}'(t) = \phi^{-1}(t)\,\vec{q}(t)$. Man erhält die Lösung von (1) in der Form

$$\vec{y}(t) = \phi(t)\,\phi^{-1}(0)\,\vec{y}_0 + \int_0^t \phi(t)\,\phi^{-1}(s)\,\vec{q}(s)\,ds,\quad t \in J. \tag{3}$$

Bemerkung: $\vec{y}_p(t) := \int_0^t \phi(t)\,\phi^{-1}(s)\,\vec{q}(s)\,ds,\ \ t \in J$ löst das Problem

$$\begin{aligned}\vec{y}\,'(t) &= P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t),\quad t \in J,\\ \vec{y}(0) &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Die Funktion $\phi(t)\phi^{-1}(s)$ heißt **die Greensche Funktion** des AWP. Sie wird durch $G(t,s)$ bezeichnet:

$$G(t,s) = \phi(t)\,\phi^{-1}(s),\quad t,\, s \in J.$$

Als Funktion von t ist $G(t,s)$ Lösung des Matrix-Problems

$$\begin{aligned}Y'(t) &= P(t)\,Y(t),\quad t \in J\\ Y(s) &= E.\end{aligned}$$

Ü:

1) Schreibe 9.12 auf mit $P(t) = A =$ konstant. Dann erhält man wieder die Lösungsdarstellung aus Satz 12, 9.11.
Welches ist die Greensche Funktion für das Problem aus Satz 12, 9.11 ?

2) Man mache die Probe: Rechne nach, dass $\vec{y}$ aus (3) Lösung von (1) ist.

10 Die Transportgleichung. Die Wellengleichung.

10.1 Einfache Beispiele

1. Wir schreiben $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ als Argument von Funktionen,$\vec{x} \in D$ (Gebiet) $\subset \mathbb{R}^n$. α sei konstant.

$$\big(D_1 u\big)(\vec{x}) = \alpha$$

hat die Lösungen
$u(\vec{x}) = \alpha x_1 + w(x_2, \ldots, x_n)$ mit einer beliebigen C^1-Funktion w in den Variablen $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

2. α konstant. Die C^2-Lösungen von

$$\big(D_1 D_2 u\big)(x_1, x_2) = \alpha$$

sind durch

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 + w_2(x_2) + w_1(x_1)$$

mit beliebigen C^1-Funktionen w_1, w_2 einer Variablen gegeben.

Ü: Welches sind die Lösungen von $\big(D_1 D_2 u\big)(\vec{x}) = \alpha, \ \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$?

3. Es sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{a} \neq \vec{0}$, und α=konstant gegeben.

Die Lösungen $u \in C^1(D), \ D \subset \mathbb{R}^n$, der Gleichung

$$\vec{a} \cdot \nabla u(\vec{x})\Big(= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j D_j u(\vec{x})\Big) = \alpha$$

sind wie folgt gegeben:

$$u(\vec{x}) = \alpha \left(A^{-1}\vec{x}\right)_1 + w\big((A^{-1}\vec{x})_2, \ldots, (A^{-1}\vec{x})_n\big)$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion w in $(n-1)$ Variablen. A ist eine reguläre (n, n)-Matrix, deren 1. Spalte $\vec{a}$ ist.

Ü: Spezialisieren Sie dies für den Fall $n = 2$.

10.2 Die Transportgleichung

Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2), \ u = u(x, t)$, mit

$$\big(D_2 u\big)(x, t) \pm c\big(D_1 u\big)(x, t) = 0, \ \ (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Hier ist c eine positive Konstante.

Satz 1 Lösungen der DGLn

(1) $\big(D_2u\big)(x,t) + c\big(D_1u\big)(x,t) = 0,$

(2) $\big(D_2u\big)(x,t) - c\big(D_1u\big)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$

sind $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ bzw. $u(x,t) = \psi(x + ct)$ mit beliebigen C^1-Funktionen φ, ψ.

Satz 2 Für $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ seien

$$\begin{aligned} \big(D_2u\big)(x,t) - c\big(D_1u\big)(x,t) = 0,\ & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = 0,\ & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

erfüllt. Dann gilt $u(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Satz 3 Alle C^1-Lösungen der Gleichung

$$\big(D_2u\big)(x,t) - c\big(D_1u\big)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man durch $u(x,t) = \psi(x + ct)$ mit beliebigen Funktionen $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Ü: Formulieren und begründen Sie Sätze 2 und 3 für die Gleichung (1).

Bemerkung Um die Operation (Vorschrift), die in (1), (2) auf u wirkt, zu betonen, schreiben wir auch

$$\begin{aligned} \text{anstelle von (1): } & \big(D_2 + cD_1\big)\, u(x,t) = 0, \\ \text{anstelle von (2): } & \big(D_2 - cD_1\big)\, u(x,t) = 0. \end{aligned}$$

10.3 Die inhomogene Transportgleichung

Gegeben sind $f = f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2),\ g = g(x) = C(\mathbb{R})$.
Gesucht sind $u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$, mit

$$\text{(P)} \begin{cases} (D_2 - cD_1)u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ \qquad\qquad u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Satz 4 Sind $g \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, so wird durch

$$u(x,t) = g(x + ct) + \int_0^t f(x - c(s - t), s)\, ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

die Lösung von (P) gegeben.

Bemerkung u aus Satz 4 ist $u = u_1 + u_2$, wobei u_1 Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= 0, \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

und u_2 Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= f(x,t), \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

ist.
$u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$, kann man so erhalten (Methode von **Duhamel**):
Löse für jedes s mit $0 \le s \le t$ das Problem

$$\begin{aligned} \big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= 0, && x \in \mathbb{R},\ t \ge s \\ u(x,s) &= f(x,s), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nenne diese Lösung $w(x,t;s)$. Dann gilt $u_2(x,t) = \int_{s=0}^{t} w(x,t;s)\, ds$. (1)
Es ist $w(x,t;s) = f(x - c(t-s); s)$. (Vergleiche mit A4, 8.Üblatt)

Ü: Man mache die Probe, dass u_2 aus (1) Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

ist.

10.4 Die eindimensionale Wellengleichung

1. $c > 0$ sei eine gegebene Konstante. Gesucht ist $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\big(D_2^2 - c^2 D_1^2\big)u(x,t) = 0. \tag{1}$$

Es werden neue Variablen ξ, τ eingeführt durch

$$\begin{aligned} x &= c(\xi + \tau), & t &= \xi - \tau \\ \xi &= \frac{1}{2c}(x + ct), & \tau &= \frac{1}{2c}(x - ct) \end{aligned}$$

Für die Funktion $v,\ v(\xi,\tau) := u(c(\xi+\tau),\ \xi - \tau)$, gilt, wenn u der Gleichung (1) genügt:

$$\big(D_1 D_2 v\big)(\xi,\tau) = 0.$$

Man erhält $v(\xi,\tau) = w_1(\xi) + w_2(\tau)$ mit beliebigen genügend diff'baren Funktionen w_1, w_2 einer Variablen. Rücktransformation auf die Variablen x, t liefert den

Satz 5 Jede C^2-Lösung $u = u(x,t)$ der Gleichung

$$\big(D_2^2 u\big)(x,t) - c^2\big(D_1^2 u\big)(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1}$$

hat die Form $u(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$ mit beliebigen C^2-Funktionen φ, ψ.

Bemerkung: Anderes Vorgehen zur Lösung von (1).

(1) wird so geschrieben:

$$\big(D_2 - cD_1\big)\big(D_2 + cD_1\big)u(x,t) = 0 \tag{1}$$

Hiermit wird das Lösen von (1) zurückgeführt auf das Lösen zweier Probleme (gemäß 10.2, 10.3).

Berechne $v = v(x,t)$ aus

$$\big(D_2 - cD_1\big)v(x,t) = 0 \tag{2}$$

und dann $u = u(x,t)$ aus

$$\big(D_2 + cD_1\big)u(x,t) = v(x,t). \tag{3}$$

(1) ist äquivalent zu (2), (3).
(2) wird mit Satz 3 und (3) mit Satz 4 gelöst. Man findet den Satz 5 wieder.

2. Zur Lösung **der eindimensionalen inhomogenen Wellengleichung**

$$\big(D_2^2 u\big)(x,t) - c^2\big(D_1^2 u\big)(x,t) = f(x,t) \tag{4}$$

gehen wir wie in der vorhergehenden Bemerkung vor. (4) wird als System von Gleichungen erster Ordnung geschrieben:

$$\big(D_2 v\big)(x,t) - c\big(D_1 v\big)(x,t) = f(x,t) \tag{5}$$

$$\big(D_2 u\big)(x,t) + c\big(D_1 u\big)(x,t) = v(x,t) \tag{6}$$

Mit **Satz 4** kann u berechnet werden.

Satz 6 Die Lösung u der Gleichung (4), die $u(x,0) = D_2 u(x,0) = 0$ erfüllt, ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{s=0}^{t}\Big(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau,s)\,d\tau\Big)ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Die **Cauchysche Anfangswertaufgabe** (AWA).
Die **d'Alembertsche Formel.**

Satz 7 Die Cauchysche AWA für die eindimensionale Wellengleichung

$$\left.\begin{aligned}\big(D_2^2 - c^2 D_1^2\big)u(x,t) &= f(x,t), &\quad (x,t) &\in \mathbb{R}^2,\\ u(x,0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R}\\ D_2 u(x,0) &= h(x), & x &\in \mathbb{R},\end{aligned}\right\} \ (7)$$

mit gegebenen genügend gutartigen Funktionen f, g, h hat die Lösung

$$\begin{aligned}u(x,t) = {} & \frac{1}{2}\big(g(x+ct) + g(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,d\tau\\ & + \frac{1}{2c}\int_{s=0}^{t}\Big(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau,s)\,d\tau\Big)ds\end{aligned} \tag{8}$$

Bemerkungen

1) (8) erhält man durch Kombination der Ergebnisse vorher und indem man (7) in zwei Probleme zerlegt:
   Das Problem mit $f = 0$ und das Problem mit $g = h = 0$. Die Summe der Lösungen dieser (halbhomogenen) Probleme ist (8).
2) (8) mit $f = 0$ heißt d' Alembertsche Formel.
3) **Ü:** Rechnen Sie nach, dass u aus (8)   (7) erfüllt.
4) **Ü:** Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals mit f.

11 Die quasilineare PDGL 1. Ordnung. Das zugehörige Cauchysche AWP.

11.1 Problemformulierung

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $G_0 = \{(x,y) | (x,y,z) \in G\}$. Gegeben sind $a,\, b \in C^1(G)$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x,y,z) \neq \vec{0},\ (x,y,z) \in G$.
Es liegt die Gleichung

$$a(x,y,z)p + b(x,y,z)q = c(x,y,z), \quad (x,y,z) \in G \tag{1}$$

vor.

$u \in C^1(G_0)$ heißt **Lösung** von (1), falls für alle $(x,y) \in G_0$

$$a(x,y,u(x,y))D_1u(x,y) + b(x,y,u(x,y))D_2u(x,y) = c(x,y,u(x,y)) \tag{2}$$

erfüllt ist.

11.2 Geometrische Deutung. Charakteristiken.

1) Es sei u eine Lösung von (1). Die Fläche $z = u(x,y),\ (x,y) \in G_0$, heißt auch **Integralfläche der DGL (1).**

2) $P = (x_0, y_0, z_0) \in G;\ a_0 := a(x_0,y_0,z_0),\ b_0 = b(x_0,y_0,z_0),\ c_0 = c(x_0,y_0,z_0)$.

   Die Ebenen, die die Gerade (die **Mongesche Gerade** von (1) durch P)

   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ enthalten, kommen als Tangentialebenen in P an Integralflächen $z = u(x,y)$ durch P in Frage.

3) Eine glatte Kurve mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Tangenten die Mongesche Gerade der DGL (1) im Berührpunkt ist, heißt **Charakteristik der DGL (1).** Lösungen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in J$, der DGLn

   $$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(\vec{r}(t)),\ t \in J, \tag{3}$$

   sind Parameterdarstellungen der Charakteristiken.

   (3) heißt auch **charakteristisches DGLsystem.** Beschreibt $\vec{r}(t) (\subset G)$ eine Charakteristik, so heißt $\vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} (\subset G_0)$ die zugehörige **charakteristische Grundkurve.**

Satz 1 Es seien gegeben: $a, b, c \in C^0(G)$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ in G, und $u \in C^1(G_0)$. Dann gilt: u ist Lösung der DGL (1) genau dann, wenn durch jeden Punkt der Fläche $z = u(x, y)$ eine ganz in der Fläche verlaufende Charakteristik geht.

Satz 2 $a, b, c \in C^1(G)$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ in G. Es seien $u \in C^1(G_0)$ eine Lösung der DGL (1) und $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in J$ mit $\vec{r}_0(t) \in G_0$, die Darstellung einer Charakteristik der DGL (1). γ und die Integralfläche $F : z = u(x, y)$, $(x, y) \in G_0$, haben einen Punkt gemeinsam. Dann liegt γ ganz in F.

Folgerung Sind F_1 und F_2 Integralflächen von (1) mit $P \in F_1 \cap F_2$, so ist $F_1 \cap F_2$ eine Charakteristik von (1).

11.3 Das Cauchysche Anfangswertproblem (AWP).

1) Es ist in $G \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Raumkurve Γ durch

$$x = f(s),\ y = g(s),\ z = h(s),\ s \in I$$
$$(f,\ g,\ h \in C^1,\ f'^2 + g'^2 + h'^2 \neq 0)$$

gegeben.

Gesucht ist eine Lösung u von (1) mit
$$u(f(s), g(s)) = h(s). \tag{4}$$

(Γ liegt in der Fläche $F : z = u(x, y)$). Die Lösung ist gesucht in einer Umgebung des Punktes $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$.

2) Es gelte $a, b, c \in C^1(G)$ (nahe (x_0, y_0, z_0)). Für jedes s aus einer Umgebung von s_0 sei

$$x = X(s, t),\ y = Y(s, t),\ z = Z(s, t) \tag{5}$$

die Lösung der charakteristischen DGLn

$$\left.\begin{aligned} D_2X(s, t) &= a(X(s, t),\ Y(s, t),\ Z(s, t)) \\ D_2Y(s, t) &= b(X(s, t),\ Y(s, t),\ Z(s, t)) \\ D_2Z(s, t) &= c(X(s, t),\ Y(s, t),\ Z(s, t)) \end{aligned}\right\} (6)$$

mit $X(s, 0) = f(s)$, $Y(s, 0) = g(s)$, $Z(s, 0) = h(s)$.

Gilt

$$J = \det \begin{pmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

so wird durch (5) lokal (bei P_0) eine Lösung von (4) in Parameterdarstellung gegeben. (7) gewährleistet auch, dass man aus den ersten beiden Gleichungen (5) $s = S(x, y)$, $t = T(x, y)$ berechnen kann, so dass durch $z = Z(S(x, y),\ T(x, y)) =: u(x, y)$ eine explizite Lösungsdarstellung gegeben ist.

Bemerkung Ist $J = 0$, so existiert eine Lösung von (4) nur, falls Γ bei P_0 eine Charakteristik ist.

11.4 Die lineare homogene DGL für n Variablen $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

Gegeben sind $a_j \in C^1(G_0)$ $(G_0 \subset \mathbb{R}^n)$. Gesucht ist $u \in C^1(G_0)$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\vec{x}) D_j u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in G_0. \tag{8}$$

Mit $\vec{a}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1(\vec{x}) \\ a_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ a_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ lautet das charakteristische DGL System

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}(\vec{x}(t))$$

$$\dot{z}(t) = 0$$

Satz 3 Die im Gebiet G_0 (des $\vec{x}$-Raumes) stetig diff'bare Funktion u ist in G_0 Lösung der DGL (8) genau dann, wenn gilt: alle in G_0 verlaufenden charakteristischen Grundkurven von (8) sind Höhenlinien von u (d.h. es gilt $u(\vec{x}(t)) = \text{const}$, falls $\vec{x} = \vec{x}(t)$ charakteristische Grundkurve ist).

11.5 Eine Möglichkeit, (1) zu lösen

Satz 4 Ist $w = f(x, y, z)$ mit $D_3 f \neq 0$ Lösung der DGL $a(x, y, z)D_1 w + b(x, y, z)D_2 w + c(x, y, z)D_3 w = 0$, so wird durch $f(x, y, u(x, y)) = \text{const}$ implizit eine Lösung von

$$a(x, y, z)p + b(x, y, z)q = c(x, y, z) \tag{1}$$

gegeben.

11.6 Beispiele