

HM III für die Fachrichtung Physik
WS 2013/14

Andreas Müller-Rettkowski
e-mail: andreas.mueller-rettkowski@kit.edu

LaTeX: Christina Hägele

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze. Der Besuch der Vorlesung ist hierdurch nicht zu ersetzen: In der Vorlesung wird erklärt, begründet, veranschaulicht und eingeordnet.

Inhaltsverzeichnis

1. Teil Zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen	2
1 Beispiele. Grundlegende Begriffe.	3
1.1 Beispiele	3
1.2 Gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL). Begriffe.	3
1.3 Bemerkung zum geometrischen Aspekt einer GDGL im Fall $n = 1$	3
2 Einfache integrierbare Typen von GDGLn.	4
2.1 Die DGL mit getrennten Variablen	4
2.2 Beispiele	4
2.3 Die DGL vom Bernoulli Typ	5
2.4 Die lineare inhomogene DGL 1. Ordnung	5
3 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Die Lipschitz-Bedingung.	6
3.1 Das Problem. Die Voraussetzungen.	6
3.2 Behandlung des Problems	6
3.3 Anmerkungen. Beispiele.	7
4 Implizite DGLn.	8
4.1 $F(x, y, y') = 0$	8
4.2 $\phi(y, y', y'') = 0$	9
5 Exakte DGLn	10
5.1 Erinnerungen an HM II	10
5.2 Die DGL $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$. Exaktheit.	10
5.3 Lösen exakter DGLn	10
5.4 Der integrierende Faktor	10
6 Lineare DGLn n-ter Ordnung	12
6.1 Definitionen. Problemformulierung.	12
6.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz	12
6.3 Die homogene Gleichung	13
6.4 Rechnen mit KK-Operatoren	13
6.5 Bestimmung einer Lösungsbasis für $Ly = 0$ mit einem KK-Operator L.	14
6.6 Wie die homogene und die inhomogene Gleichung zusammenhängen.	15
6.7 Berechnung von y_p . Variation der Konstanten.	16
6.8 Regularität der Wronski-Matrix	17
7 Lineare DGLn 2. Ordnung	18
7.1	18
7.2 Reduktion der Ordnung	18
7.3 Beispiele	18
7.4 Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	18
7.5 Die DGL vom Eulerschen Typ	19

8	Lösung mit Potenzreihen	21
8.1	Der Ausgangspunkt. Beispiele.	21
8.2	Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz	21
8.3	Zur Berechnung der c_k und ϱ	22
8.4	Der reguläre Fall $p_0 = q_0 = q_1 = 0$	22
8.5	Ab jetzt liegt der Fall $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ vor.	22
8.6	Zusammenfassender Satz für den Fall reeller ϱ_1, ϱ_2 und Stelle der Bestimmtheit x_0	24
9	Lineare DGL Systeme 1. Ordnung	26
9.1	Das Problem. Die Vorgaben.	26
9.2	Ein Spezialfall von (1) ist das Problem aus 6.2, Satz 1.	26
9.3	Matrixfunktionen	28
9.4	Reihen von Matrizen. Konvergenz. Norm.	28
9.5	$\exp(\mathbf{A})$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$	29
9.6	Die DGL für $e^{t\mathbf{A}}$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$	29
9.7	Die Matrixdgl. $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)$. Eindeutigkeitssatz.	29
9.8	$\exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B})$	29
9.9	Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für homogene lineare Sys- teme mit konstanten Koeffizienten	30
9.10	Berechnen von $\exp(t\mathbf{A})$	30
9.11	Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	30
9.12	Das Problem (1) aus 9.1. Variation der Konstanten.	30
10	Die Transportgleichung. Die Wellengleichung.	32
10.1	Einfache Beispiele	32
10.2	Die Transportgleichung	32
10.3	Die inhomogene Transportgleichung	33
10.4	Die eindimensionale Wellengleichung	34
11	Die quasilineare PDGL 1. Ordnung. Das zugehörige Cauchysche AWP.	37
11.1	Problemformulierung	37
11.2	Geometrische Deutung. Charakteristiken.	37
11.3	Das Cauchysche Anfangswertproblem (AWP).	38
11.4	Die lineare homogene DGL für n Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$	39
11.5	Eine Möglichkeit, (1) zu lösen	39
11.6	Beispiele	39

1. Teil Zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

1 Beispiele. Grundlegende Begriffe.

1.1 Beispiele

- 1) radioaktiver Zerfall
- 2) Schwingungsgleichung
- 3) mathematisches Schwebpendel
- 4) Wachstumsmodell

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL). Begriffe.

$H : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, p_1, \dots, p_n) \rightarrow H(x, y, p_1, \dots, p_n)$ sei eine Funktion.

$$H(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

heißt **GDGL n-ter Ordnung**.

Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : J$ (Intervall) $\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \rightarrow \varphi(x)$ mit

$$H(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in J$$

heißt **Lösung der DGL (1) auf J**.

Hat man $H(x, y, p_1, \dots, p_n) = p_n - F(x, y, p_1, \dots, p_{n-1})$, so heißt die zugehörige
DGL

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

explizit.

1.3 Bemerkung zum geometrischen Aspekt einer GDGL im Fall $n = 1$.

Das einer GDGL $H(x, y, y') = 0$ zugeordnete Richtungsfeld. Und was das für
das Lösen der DGL bedeutet.

2 Einfache integrierbare Typen von GDGLn.

2.1 Die DGL mit getrennten Variablen

$f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (I_1, I_2 reelle Intervalle) sind gegebene stetige Funktionen. Es liegt die DGL

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I \text{ (Intervall)} \subset I_1 \quad (1)$$

vor.

Satz 1

- a) Sind y_1, y_2, \dots die Nullstellen von g , so sind die konstanten Funktionen $y = \varphi(x) = y_j, x \in I, j = 1, 2, \dots$ Lösungen von (1).
- b) Ist $g(t) \neq 0$ für $t \in J \subset I_2$ (J etwa (y_1, y_2)), so wird jede Lösung $y = \varphi(x), x \in I$ mit $\varphi(I) \subset J$, der DGL (1) implizit durch

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in I, \quad (2)$$

gegeben. Hierbei ist $c \in I$ eine beliebige Konstante.

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in I,$$

ist eine Darstellung der Lösung durch (x_0, y_0) .

2.2 Beispiele

1) Die lineare homogene DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x)y, \quad x \in I. \quad (3)$$

Satz 2 (Die allgemeine Lösung von (3)) Es sei $f \in C(I)$ (stetig auf I). Jede Lösung der DGL (3) ist durch

$$y = \varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x f(t) dt\right), \quad x \in I,$$

mit beliebigem $x_0 \in I$ und einer beliebigen Konstanten c gegeben. Die Lösung durch den Punkt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ ist

$$y = \varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x f(t) dt\right), \quad x \in I.$$

2) Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (x \neq 0). \quad (4)$$

Mittels der Substitution " $y \rightarrow u := \frac{y}{x}$ " wird die DGL (4) umgeschrieben in eine DGL für u . Diese ist vom Typ 2.1 und kann gemäß Satz 1 gelöst werden. Dann wird die Substitution rückgängig gemacht: " $u \rightarrow y = xu$ ".

Beispiel $x^2y' = x^2 + xy + y^2$, $x \neq 0$.

2.3 Die DGL vom Bernoulli Typ

$$y' + h(x)y = q(x)y^\alpha, \quad x \in I. \quad (5)$$

Hier sind $h, q \in C(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

Es wird $\alpha \neq 1$ vorausgesetzt. (Warum ist das keine Einschränkung?)

Durch Multiplikation von (5) mit $\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x h(t) dt\right)$, $x \in I$, wird (5) geschrieben als DGL vom Typ 2.1 für μy (wobei y (5) löst). Man erhält als Lösung (mit beliebigem $x_0 \in I$)

$$y = \varphi(x) = (\mu(x))^{-1} \left(\varphi(x_0)^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_{x_0}^x q(t)\mu(t)^{1-\alpha} dt \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \in I.$$

2.4 Die lineare inhomogene DGL 1.Ordnung

$$y' + h(x)y = q(x), \quad x \in I, \quad (6)$$

erhält man aus 2.3, wenn man dort $\alpha = 0$ setzt.

Mit $y_0(x) := \exp\left(-\int_{x_0}^x h(t) dt\right)$ ist gemäß Satz 2 durch cy_0 mit beliebigen Konstanten c die allgemeine Lösung von $y' + h(x)y = 0$ (der (6) zugeordneten homogenen Gleichung) gegeben.

Satz 3 (Die allgemeine Lösung von (6))

a) y_p mit $y_p(x) = \left(\int_{x_0}^x \frac{q(t)}{y_0(t)} dt\right) y_0(x)$, $x \in I$, ist eine Lösung von (6).

b) Ist $y = \varphi(x)$ eine Lösung von (6), so gilt

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)y_0(x) + y_p(x), \quad x \in I.$$

c) Für jede Konstante c ist $\varphi(x) = cy_0(x) + y_p(x)$ Lösung von (6).

Beispiel

$$\frac{y'}{y} = x \ln(y) + 2x, \quad y > 0.$$

3 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz. Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Die Lipschitz-Bedingung.

3.1 Das Problem. Die Voraussetzungen.

Es liegt vor das **Anfangswertproblem (AWP)**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

mit den folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungen:

Mit $I_1 = \{x \mid |x - x_0| \leq \alpha\}$, $I_2 = \{y \mid |y - y_0| \leq \beta\}$ und $R = I_1 \times I_2$ sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$M := \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in R\}$.

Gesucht ist eine Lösung durch (x_0, y_0) : also eine stetig diff'bare Funktion $\varphi : I \subset I_1 \rightarrow I_2$ ($x_0 \in I$) mit $(x, \varphi(x)) \in R$ für $x \in I$ und

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in I \text{ und } \varphi(x_0) = y_0. \quad (2)$$

3.2 Behandlung des Problems

1. Schritt

Satz 1

a) Ist $\varphi : I \rightarrow I_2$ Lösung von (1), so gilt

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in I. \quad (3)$$

b) Ist $\varphi \in C(I)$ Lösung von (3), so ist φ Lösung von (1).

Definition (Lipschitz-Bedingung) $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ genügt auf R einer Lipschitz-Bedingung, falls es eine Konstante $L > 0$ so gibt, dass für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in R$

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$$

gilt.

2. Schritt

Satz 2 (Eindeutigkeitsatz) $f \in C(R)$ und f genüge auf R einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L . $\varphi, \psi : I_1 \rightarrow I_2$ seien Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$. Es existiere ein x_1 im Innern von I_1 , für das $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ gilt. Dann hat man $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I_1$.

3. Schritt

Satz 3 (Existenz- und Eindeigkeitsatz) f, M, α, β seien wie unter 3.1, (1). f genüge in R einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L . Dann gibt es auf $I_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| \leq \delta\}$, $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$, genau eine Lösung φ des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Zum Beweis

Die zu (1) äquivalente Integralgleichung (3) (Satz 1) wird iterativ (Picard Iteration) gelöst.

Definiere $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots : I_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ rekursiv so:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &:= y_0, \\ \varphi_{n+1}(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Es gelten:

1. Die Funktionen (4) sind wohldefiniert.
2. Die Folge (φ_n) ist auf $I_\delta(x_0)$ konvergent: es gibt $\varphi : I_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ ($n \rightarrow \infty$) für $x \in I_\delta(x_0)$.
3. $\varphi \in C(I_\delta(x_0))$ und $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$, $|x - x_0| \leq \delta$.

3.3 Anmerkungen. Beispiele.

1.

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(x_0) = 0$$

Das Problem hat viele Lösungen.

2.

$$y' = 2 \cdot 10^6 xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Die rechte Seite der DGL ist $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Trotzdem existiert die Lösung nur für $|x| < 10^{-3}$.

3.

$$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = \alpha > 0.$$

Die Lösung existiert höchstens für $x < \frac{1}{\alpha}$.

4 Implizite DGLn.

4.1 $F(x, y, y') = 0$

Voraussetzung

(1) Es ist $F = F(x, y, p) \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3$, mit $D_3 F(x, y, p) \neq 0$ für $(x, y, p) \in G$ gegeben.

(2) Gesucht ist $y = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1(J)$ derart, dass für $x \in J$ $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G$ gilt und für alle $x \in J$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

erfüllt ist.

Beispiele (f, g, h, H, G sind gegebene Funktionen)

$$x = H(y, y'), y = G(x, y'), x = h(y'), y = g(y')$$

$$y = x f(y') + g(y')$$

Lagrange oder d'Alembert Gleichung

$$y = x y' + g(y')$$

Clairaut DGL

Satz 1 Gibt es Konstanten a, b derart, dass

$$F(x, ax + b, a) = 0 \quad \text{für alle } x \in J \quad (3)$$

erfüllt ist, so sind $y = \varphi(x) = ax + b$, $x \in J$, Lösungen der DGL $F(x, y, y') = 0$.

Beispiele

1) $y = x y' + g(y')$

2) $y = y' + (y')^2$

3) $y = x f(y') + g(y')$

Satz 2

$$x = \psi(t), y = \chi(t) \quad (t \in I) \quad - \psi, \chi \in C^1(I) -$$

ist die Parameterdarstellung einer von einer Geraden verschiedenen Lösung der DGL $F(x, y, y') = 0$, falls

$$F(\psi(t), \chi(t), t) = 0, \quad t \in J, \quad (4)$$

$$\dot{\chi}(t) = t \cdot \dot{\psi}(t), \quad t \in J, \quad (5)$$

erfüllt sind.

Beispiele

1) $y = x(y')^2 + y'$

2) $y = y' + (y')^2, y(1) = 2$

4.2 $\phi(y, y', y'') = 0$

Beispiele

1) $y''(x) + c \sin(y(x)) = 0$ (c konstant)

2) $\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r^2(t)}$, $r(0) = R$, $\dot{r}(0) = v_0$

3) $y''(x) + p(y'(x))^2 + q \sin(y(x)) = 0$ ($p > 0, q > 0$ konstant)

Satz 3 Es sei $p = p(t)$ Lösung der Gleichung

$$\phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0.$$

Genügt dann $y = \varphi(x)$ der DGL $y' = p(y)$, so ist $y = \varphi(x)$ Lösung der DGL $\phi(y, y', y'') = 0$.

Beispiel

$$y'' = yy' + (y')^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -1$$

5 Exakte DGLn

5.1 Erinnerungen an HM II

1) Kettenregel, Potentialfeld

2) **Satz (Satz 4, Abschnitt 38.3)** Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Es gilt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \in C^1(D)$, ist genau dann auf D ein Potentialfeld, wenn auf D $D_2v_1 = D_1v_2$ erfüllt ist.

5.2 Die DGL $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$. Exaktheit.

Bedeutung der Schreibweise

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

für eine DGL und wie hier die DGL $y' = F(x, y)$ enthalten ist.

Voraussetzungen für dieses Kapitel:

$D \subset \mathbb{R}^2$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f, g \in C^1(D)$ und $f^2(x, y) + g^2(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \in D$. (2)

Definition Die DGL (1) heißt **exakt in D** , falls in D

$$D_2f = D_1g$$

gilt.

5.3 Lösen exakter DGLn

Satz 1 Es sei die DGL (1) mit den unter (2) formulierten Voraussetzungen in D exakt, und H sei ein Potential in D für das Vektorfeld $\vec{v} := \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Dann sind alle Lösungen von (1) implizit durch $H(x, y) = c$ (c beliebig, konstant) gegeben. (Die Lösungen sind die Höhenlinien des Potentials.)

Beispiele

1) $y' = p(x)q(y)$ (siehe 2.1 / DGL mit getrennten Variablen)

2) $\frac{y}{x^2+y^2} - \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) y' = 0$

5.4 Der integrierende Faktor

Es liegt die DGL (Abschnitt 5.2)

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

mit den dort formulierten Voraussetzungen (2) vor. **Die DGL (1) sei nicht exakt.**

Definition Eine C^1 -Funktion $\mu = \mu(x, y)$ ($\neq 0$ in D) heißt **integrierender Faktor** für (1), falls die zu (1) äquivalente DGL

$$(\mu f)(x, y) dx + (\mu g)(x, y) dy = 0 \quad (3)$$

in D exakt ist, falls also μ der folgenden partiellen DGL genügt:

$$D_2(\mu f) = D_1(\mu g) \quad \text{in } D. \quad (4)$$

Mit geeigneten Ansätzen kann man die Lösung von (4) auf die Lösung gewisser GDGLn zurückführen. Etwa, wenn man fordert, dass μ eine spezielle Form hat, wie z.B. $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$, ...

Beispiele

- 1) Die lineare inhomogene Gleichung 1. Ordnung (Abschnitt 2.4).
- 2) $y - (x^2 + y^2 + x)y' = 0$ (Beispiel 2), 5.3

6 Lineare DGLn n-ter Ordnung

6.1 Definitionen. Problemformulierung.

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $p_1, \dots, p_n, r \in C(J)$ sind gegebene Funktionen. Mit D wird der Operator der Differentiation bezeichnet: $Dy := y'$, $y \in C^1(J)$.
 $D^j y = D(D^{j-1}y)$, $D^0 y = y$ ($j \in \mathbb{N}$).

$$L : C^n(J) \rightarrow C(J)$$

mit

$$L := D^n + \sum_{j=1}^n p_j D^{n-j}$$

heißt **linearer Differentialoperator der Ordnung n**.

Erinnerung Linearität bedeutet: (vgl. 19.1)

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= L(y_1) + L(y_2), & y_1, y_2 &\in C^n(J) \\ L(cy) &= cL(y), & c \in \mathbb{R} \text{ konstant, } y &\in C^n(J) \end{aligned}$$

Gesucht sind alle Lösungen (**die allgemeine Lösung**) y der Gleichung

$$Ly = r \quad \text{auf } J. \quad (\text{Lineare DGL der Ordnung } n) \quad (1)$$

Ist $r \neq 0$, so heißt die Gleichung (1) **inhomogen**. Die Gleichung $Ly = 0$ ist die zu (1) gehörende **homogene Gleichung**. Die allgemeine Lösung von (1) werden wir auch durch \mathcal{L}_r bezeichnen:

$$\mathcal{L}_r := \{ y \in C^n(J) \mid (Ly)(x) = r(x), \quad x \in J \}.$$

Hiermit bezeichnet \mathcal{L}_0 die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Mit HM II schreiben wir für \mathcal{L}_0 auch $\text{Kern}(L)$. Wir erinnern daran, dass \mathcal{L}_0 ein Vektorraum ist: ein Teilraum des Vektorraumes $C^n(J)$. Wir erinnern an den Dimensionsatz aus HM II (19.2, Satz 3):

Sind V, W Vektorräume, ist $\dim(V)$ endlich und ist $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

6.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Satz 1 Es seien $p_1, \dots, p_n \in C(J)$ und L der lineare Differentialoperator

$$L = D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \dots + p_n.$$

Es gilt:

Zu $x_0 \in J$ und Zahlen $k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Funktion $f \in C^n(J)$, die auf J der homogenen DGL $L(y) = 0$ und den Anfangsbedingungen $f^{(j)}(x_0) = k_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ genügt.

Folgerung: Das Problem $L(f) = 0$ auf J , $f^{(j)}(x_0) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, hat nur die triviale Lösung $f = 0$.

6.3 Die homogene Gleichung

Satz 2 Für $L : C^n(J) \rightarrow C(J)$, $L = D^n + \sum_{j=1}^n p_j D^{n-j}$ gilt

$$\dim \text{Kern}(L) (= \dim(\mathcal{L}_0)) = n.$$

Satz 3 Es sei L ein linearer Differentialoperator der Ordnung n . Sind u_1, u_2, \dots, u_n l.u. Lösungen der homogenen DGL $L(y) = 0$ auf J , so kann jede Lösung $y = f(x)$, $x \in J$, in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x) \quad (2)$$

mit geeigneten Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n geschrieben werden.

Bemerkung $\{ \sum_{k=1}^n c_k u_k \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \}$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L(y) = 0$.

Sind die p_j in L konstant, so nennen wir L einen **KK-Operator**. Für KK-Operatoren kann man $\text{Kern}(L)$ bestimmen.

6.4 Rechnen mit KK-Operatoren

Es liegt vor $A = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$ mit konstanten reellen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n und $a_0 \neq 0$. A heißt **KK-Operator**. Wir betrachten im Folgenden die KK-Operatoren auf $C^\infty(J)$

$$A : C^\infty(J) \rightarrow C^\infty(J), \text{ linear.}$$

6.4.1

Es seien $A = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$ ($a_0 \neq 0$), $B = \sum_{j=0}^m b_j D^{m-j}$ ($b_0 \neq 0$) zwei KK-Operatoren und λ eine Konstante. Es können $A + B$, λA , AB gebildet werden. Wegen $D^r D^s = D^s D^r$ ($r, s \in \mathbb{N}$) gilt $AB = BA$.

6.4.2

Dem KK-Operator A wird sein **charakteristisches Polynom** p_A zugeordnet:

$$A = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j} \rightarrow p_A(x) := \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Zuordnung ist bijektiv und mit den oben (6.4.1) beschriebenen Operationen verträglich:

Satz 4 Es seien A, B KK-Operatoren mit den charakteristischen Polynomen p_A, p_B . Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelten:

- (a) $A = B \Leftrightarrow p_A = p_B$,
- (b) $p_{A+B} = p_A + p_B$,
- (c) $p_{AB} = p_A p_B$,
- (d) $p_{\lambda A} = \lambda p_A$.

Zur Bedeutung des charakteristischen Polynoms der folgende Satz:

Satz 5 Mit $A = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$, a_j konstant, gelten:

- (a) $A(e^{kx}) = e^{kx} p_A(k)$ (k konstant)
- (b) $A(x^l e^{kx}) = e^{kx} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} x^{l-j} p_A^{(j)}(k)$, $l \in \mathbb{N}$, k konstant.

Hieraus ergibt sich:

- (c) Für $m \in \mathbb{N}$, r konstant und $A = (D - \text{rid})^m$ gilt:
 $A(x^l e^{rx}) = 0$ für $l = 0, 1, \dots, m-1$.

6.5 Bestimmung einer Lösungsbasis für $Ly = 0$ mit einem KK-Operator L .

Für das Folgende beachte man: Aus Satz 4, (a), (c) folgt:

Für $p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ hat man:

$$p = p_A \quad \text{mit} \quad A = a_0(D - x_1 \text{id})(D - x_2 \text{id}) \cdots (D - x_n \text{id}).$$

Satz 6 Es sei L ein KK-Operator, der als Produkt von KK-Operatoren A_1, \dots, A_k

$$L = A_1 A_2 A_3 \cdots A_k$$

geschrieben werden kann. Es gilt: $\text{Kern}(A_j) \subset \text{Kern}(L)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

(Der Lösungsraum von $L(y) = 0$ enthält den Lösungsraum von $A_j(y) = 0$ für jedes j .)

Lösung von $L(y) = 0$. $L = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$, a_j konstant, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

1. p_L hat n verschiedene reelle Nullstellen

Satz 7 $p_L(r_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$. $r_j \neq r_l$ ($j \neq l$). Dann wird die allgemeine Lösung der Gleichung $L(y) = 0$ auf \mathbb{R} durch

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{r_k x}$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_n gegeben.

2. p_L hat mehrfache reelle Nullstellen

Satz 8 Die m Funktionen $u_j(x) = x^j e^{rx}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ sind l.u. Lösungen der Gleichung $(D - r \operatorname{id})^m(y) = 0$ (Beachte Satz 5 (c)).

Wir fassen zusammen:

Satz 9 $Ly = 0$ sei eine lineare DGL n -ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. p_L habe die verschiedenen reellen Nullstellen r_1, r_2, \dots, r_k mit den zugehörigen Vielfachheiten m_1, m_2, \dots, m_k ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$). Dann ist $u_{q,p} : u_{q,p}(x) = x^{q-1} e^{r_p x}$, $q = 1, \dots, m_p$, $p = 1, 2, \dots, k$ eine Basis des Lösungsraumes von $L(y) = 0$.

3. p_L hat komplexe Nullstellen

Man kann alles wie vorher mit der komplexen e -Funktion durchführen. Die Lösungen sind dann komplexwertig. Werden reelle Lösungen verlangt, so verwendet man:

Satz 10 Ist $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) eine Nullstelle der Ordnung m von p_L , so ist $\alpha - i\beta$ ebenfalls eine Nullstelle der Ordnung m , und der zugehörige reelle Operator in der Faktorisierung von L ist

$$A = (D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\operatorname{id})^m.$$

Der Lösungsraum von $A(y) = 0$ hat die reelle Basis u_q, v_q :
 $u_q(x) = x^{q-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$, $v_q(x) = x^{q-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$, $q = 1, 2, \dots, m$

6.6 Wie die homogene und die inhomogene Gleichung zusammenhängen.

Satz 11 Es sei $L : C^n(J) \rightarrow C(J)$ ein linearer Differentialoperator n -ter Ordnung (wie in 6.1) mit variablen stetigen Koeffizienten $p_j \in C(J)$; $r \in C(J)$. Es sei u_1, u_2, \dots, u_n eine Basis des Lösungsraumes von $L(y) = 0$. Es sei y_p eine Lösung von $L(y) = r$. Dann hat jede Lösung $y = f(x)$ der Gleichung $L(y) = r$ die Form

$$f(x) = y_p(x) + \sum_{j=1}^n c_j u_j(x), \quad x \in J,$$

wobei c_1, c_2, \dots, c_n Konstanten sind.

Bemerkungen

- 1) Vergleiche mit Satz 3/ 6.3 .
- 2) $\{y_p + \sum_{j=1}^n c_j u_j \mid c_j \text{ konstant}\}$ ist die allgemeine Lösung von $Ly = r$. Mit den Bezeichnungen aus 6.1 können wir Satz 11 auch übersichtlich so schreiben:

$$\mathcal{L}_r = y_p + \mathcal{L}_0.$$

Zur Lösung von $Ly = r$ sind also gemäß Satz 11 die zwei folgenden Probleme zu behandeln:

P 1. Berechne die allgemeine Lösung von $L(y) = 0$: Berechne \mathcal{L}_0 .

P 2. Berechne eine Lösung y_p von $L(y) = r$.

6.7 Berechnung von y_p . Variation der Konstanten.

P 2. ist lösbar, wenn **P 1.** gelöst ist. Gegeben sind n l.u. Lösungen u_1, u_2, \dots, u_n von $L(y) = 0$. Es wird y_p mit $L(y) = r$ wie folgt bestimmt:

Variation der Konstanten Ansatz für y_p :

Berechne n Funktionen v_1, v_2, \dots, v_n so, dass $y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$ Lösung von $Ly = r$ auf J wird. Wir fassen u_1, \dots, u_n und v_1, \dots, v_n zu den

Vektorfunktionen $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ zusammen.

Der Ansatz für y_p lautet somit: $\vec{v} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist so zu berechnen, dass $y_p = \vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathcal{L}_r$ gilt.

Satz 12 Ist $\vec{v} = \vec{v}(x)$ Lösung des Gleichungssystems:

$$(3) \begin{cases} \vec{v}' \cdot \vec{u} & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}' & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}'' & = 0 \\ \vdots & \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}^{(n-2)} & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}^{(n-1)} & = r, \end{cases}$$

so gilt $L(\vec{v} \cdot \vec{u}) = r$ auf J .

Definition (Wronski-Matrix von \vec{u} / von u_1, \dots, u_n)

Die (n, n) -Matrix, deren j -te Zeile ($j = 1, \dots, n$) $(\vec{u}^{(j-1)})^T$ ist, wird durch $W(x, \vec{u})$ bezeichnet und **Wronski-Matrix von \vec{u}** genannt. Hiermit lässt sich (3) in Matrixform so schreiben:

$$W(x, \vec{u}) \vec{v}'(x) = r(x) \vec{e}_n, \quad x \in J \quad (4)$$

$$\text{(mit } \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{)}$$

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass W für jedes $x \in J$ regulär ist. Hiermit folgt aus (4)

$$\vec{v}(x) = \vec{v}(c) + \int_c^x r(t) \left(W(t, \vec{u}) \right)^{-1} \vec{e}_n dt, \quad x, c \in J.$$

Satz 13 u_1, u_2, \dots, u_n seien n l.u. Lösungen der homogenen linearen DGL n -ter Ordnung $L(y) = 0$ auf J . Eine Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $L(y) = r$ auf J wird durch $y_p(x) = \sum_{j=1}^n u_j(x)v_j(x)$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (x) = \int_c^x r(t) \left(W(t, \vec{u}) \right)^{-1} \vec{e}_n dt, \quad x \in J, \text{ gegeben.}$$

Hier ist $c \in J$ beliebig und $W(t, \vec{u})$ die Wronski-Matrix der Funktionen u_1, u_2, \dots, u_n .

6.8 Regularität der Wronski-Matrix

Es seien u_1, u_2, \dots, u_n n l.u. Lösungen von $L(y) = 0$ und $\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j$. Es gelten also $L(u_j) = u_j^{(n)} + p_1(x)u_j^{(n-1)} + \dots + p_n(x)u_j = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Setze $w(x) = \det \left(W(x, \vec{u}) \right) = \det \left(\vec{u}(x), \vec{u}'(x), \dots, \vec{u}^{(n-1)}(x) \right)$.

Satz 14 Es gilt $w'(x) + p_1(x)w(x) = 0$, $x \in J$. Somit folgt für $c \in J$

$$w(x) = w(c) \exp \left(- \int_c^x p_1(t) dt \right), \quad x \in J.$$

Man hat $w(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.

7 Lineare DGLn 2. Ordnung

7.1

Man gehe das 6. Kapitel mit $n = 2$ durch.

7.2 Reduktion der Ordnung

Satz Es sei $u \in \mathcal{L}_0$, $u \neq 0$. Ist v die allgemeine Lösung der Gleichung

$$v'' + v' \left(2 \cdot \frac{u'}{u} + p_1 \right) = \frac{r(x)}{u(x)}, \quad x \in J,$$

so ist $y = uv$ die allgemeine Lösung von $L(y) = r$.

Bemerkungen

- 1) Diesen Satz kann man für lineare Gleichungen beliebiger Ordnung formulieren. (?)
- 2) Vergleiche mit dem Abschnitt: Variation der Konstanten. (6.7)

7.3 Beispiele

- 1) $y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin x$
- 2) $y''(x) + (1 - x^2) y(x) = 0$

7.4 Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

a, b seien reelle Konstanten; $r \in C(\mathbb{R})$. Gesucht sind alle Lösungen von

$$(Ly)(x) = y'' + 2ay' + by = r(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

1. Schritt (6.6, P 1.)

Gesucht sind zwei l.u. Lösungen von u_1, u_2 von $y'' + 2ay' + by = 0$

1.Fall $a^2 > b$

$$u_1(x) = e^{-ax} e^{\sqrt{d}x}$$

$$u_2(x) = e^{-ax} e^{-\sqrt{d}x}$$

mit $d = a^2 - b$.

2.Fall $a^2 = b$

$$u_1(x) = e^{-ax}$$

$$u_2(x) = xe^{-ax}$$

3. Fall $a^2 < b$

$$u_1(x) = e^{-ax} e^{i\omega x}$$

$$u_2(x) = e^{-ax} e^{-i\omega x}$$

mit $\omega = \sqrt{-d}$ oder zwei reelle l.u. Lösungen

$$\tilde{u}_1(x) = e^{-ax} \cos \omega x$$

$$\tilde{u}_2(x) = e^{-ax} \sin \omega x$$

2. Schritt (6.6, P 2.)

$$Ly = r \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

- a) Mit dem Satz aus 7.2 oder
- b) mit Variation der Konstanten oder
- c) mit Laplace Transformation (HM II).

Beispiel

$$y'' + 2ay' + by = f_0 \cos \omega_1 x \quad (2)$$

y, a, b, f_0, ω_1 reell

\tilde{y} sei Lösung von

$$y'' + 2ay' + by = f_0 e^{i\omega_1 x}. \quad (3)$$

Dann ist $y = \operatorname{Re}(\tilde{y})$ Lösung von (2). Zur Lösung von (3) mache den Ansatz

$$\tilde{y}(x) = \alpha e^{i\omega_1 x} = |\alpha| e^{i(\omega_1 x - \varphi)}.$$

Zu berechnen sind $|\alpha|$ und φ .

7.5 Die DGL vom Eulerschen Typ

Die DGL

$$x^2 y'' + 2axy' + by = r(x), \quad x \neq 0 \quad (1)$$

mit konstantem a und b lässt sich auf (1) aus 7.4 zurückführen.

- a) Ist $y = \varphi(x)$ für $x > 0$ Lösung von (1), so ist $\phi(t) := \varphi(e^t)$ Lösung von

$$\ddot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t) + 2a\dot{\phi}(t) + b\phi(t) = r(e^t) \quad (2)$$

Diese Gleichung ist vom Typ (1) aus 7.4. Aus $\phi(t)$ erhält man dann die Lösung φ für $x > 0$ gemäß

$$\varphi(x) = \phi(\ln x)$$

b) Im Fall $x < 0$ sind entsprechend die folgenden Substitutionen durchzuführen:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow t := \ln(-x) \\t &\rightarrow x = -e^t \\r(x) &\rightarrow r(-e^t) \\\varphi(x) &\rightarrow \phi(t) = \varphi(-e^t)\end{aligned}$$

Übung:

1) Wie sieht in diesem Fall die zu (2) analoge Gleichung aus?

2) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$

3) $x^2 y'' + xy' - y = \ln|x|$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

8 Lösung mit Potenzreihen

(Methode von Frobenius, verallgemeinerter Potenzreihenansatz)

8.1 Der Ausgangspunkt. Beispiele.

1) Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$(Ly)(x) = x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \neq 0 \quad (7)$$

wobei $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen mit reellen Koeffizienten p_j , q_j sind.

$x = 0$ heißt **Stelle der Bestimmtheit** oder **reguläre singuläre Stelle der DGL**.

Bemerkung $(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x - x_0)y' + q(x - x_0)y = 0$, $x \neq x_0$
Hier ist x_0 Stelle der Bestimmtheit. Durch Translation kann diese Gleichung leicht in die Form (1) gebracht werden.

- 2) Beispiele aus der Physik, die hierher gehören: Legendre-, Bessel-, Laguerre-, Hermite-DGL und ähnliche.
- 3) Die einfachste Gleichung der Form (1) ist die Eulersche DGL

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \quad (a, b \text{ konstant}), \quad x \neq 0$$

(siehe 7.5) Anstelle des dort besprochenen Lösungsvorgehens kann man zur Lösung auch den Ansatz $y = \varphi(x) = |x|^\varrho$ mit zu berechnendem ϱ machen. Dies ist der einfachste Fall des im Folgenden beschriebenen verallgemeinerten Potenzreihenansatzes.

8.2 Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz

Zur Lösung von

$$(Ly)(x) = x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{für } x > 0 \text{ und } x < 0 \quad (1)$$

Es wird $x > 0$ betrachtet. $x < 0$ geht analog.

Ansatz

$$y(x, \varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\varrho} \quad \text{für } x > 0 \quad (2)$$

(für $x < 0$: $y(x, \varrho) = (-x)^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$) mit aus der DGL zu berechnenden c_k und ϱ . Geht man mit dem Ansatz in die DGL ein, so erhält man

$$Ly = x^\varrho f(\varrho)c_0 + x^\varrho \sum_{k=1}^{\infty} \left[f(\varrho + k)c_k + \sum_{m=0}^{k-1} \left((m + \varrho)p_{k-m} + q_{k-m} \right) c_m \right] x^k = 0 \quad (3)$$

mit $f(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0$. Koeffizientenvergleich ergibt:

$$f(\varrho)c_0 = 0 \quad (4)$$

$$f(\varrho + k)c_k = - \sum_{m=0}^{k-1} \left((m + \varrho)p_{k-m} + q_{k-m} \right) c_m =: g_k(\varrho), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

8.3 Zur Berechnung der c_k und ϱ

Wir vermerken, dass die c_k von ϱ abhängen, durch die Schreibweise $c_k = c_k(\varrho)$. Im Fall $f(\varrho + k) \neq 0$ lassen sich die c_k aus der Rekursionsformel (5) berechnen. Berechnet man die Nullstellen von $f(\varrho)$ durch ϱ_1, ϱ_2 , so erhält man

$$Ly = c_0(\varrho)(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)x^e \quad (= c_0 f(\varrho)x^e) \quad (6)$$

mit y aus (2) und den c_k aus (5).

Da jedes c_k ein Vielfaches von c_0 ist, besagt (6), dass $Ly = 0$ mit nichttrivialer Lösung y gilt für $\varrho = \varrho_1$ oder $\varrho = \varrho_2$. Mit ϱ_j werden aus (5) $c_k(\varrho_j)$ und hiermit $y_j = y(x, \varrho_j)$ berechnet.

Es sind also zunächst die Nullstellen von f zu berechnen, die sog. **Indexgleichung $f(\varrho) = 0$** ist zu lösen.

8.4 Der reguläre Fall $p_0 = q_0 = q_1 = 0$

bedeutet, dass

$$\frac{1}{x^2}L(y) = y'' + (p_1 + p_2x + \dots)y' + (q_2 + q_3x + \dots)y \text{ wird.}$$

$\left(\frac{1}{x^2}Ly \text{ hat die Form von } Ly \text{ aus 6.1 für } n = 2 \right)$

Hier sind $\varrho_1 = 1, \varrho_2 = 0$. Man erhält mit $c_0 = 1$
in $y_1(x) = y(x, 1) = x + c_1x^2 + c_2x^3 + \dots \quad (y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1)$
und $y_2(x) = y(x, 0) = 1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad (y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0)$
zwei Potenzreihen, die l.u. Lösungen für $Ly = 0$ für $x \neq 0$ darstellen.

Fazit: Im regulären Fall führt der "normale" Potenzreihenansatz zum Ziel. Zur Übung behandle nochmals Beispiel 2), 7.3.

8.5 Ab jetzt liegt der Fall $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ vor.

In diesem Fall ist zugelassen (im Unterschied zum 6. Kapitel. Siehe die Voraussetzungen in 6.1), dass die Koeffizienten von

$$\frac{1}{x^2}L(y) = y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y$$

bei y' eine Polstelle 1. Ordnung,
bei y eine Polstelle 2. Ordnung haben dürfen.

- 1) $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\varrho_2 = \bar{\varrho}_1$.
 Mit $c_0(\varrho_1) (= c_0(\varrho_2)) = 1$ und $c_k(\varrho_1)$ (bzw. $c_k(\varrho_2)$) aus (5) berechnet man $y(x, \varrho_1)$.

$$y_1(x) = \operatorname{Re} y(x, \varrho_1)$$

$$y_2(x) = \operatorname{Im} y(x, \varrho_1) (= -\operatorname{Im} y(x, \varrho_2))$$

sind für $0 < x < R$ reelle l.u. Lösungen von $Ly = 0$.

Beispiel: $x^2 y'' + xy' + y = 0$

- 2) **Ab jetzt sind** $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ **mit** $\varrho_1 \geq \varrho_2$.

- a) $\varrho_1 > \varrho_2$, $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$

Mit $c_0 = 1$ sind für ϱ_1 die $c_k(\varrho_1)$ für $k = 1, 2, \dots$ und für ϱ_2 die $c_k(\varrho_2)$ für $k = 1, 2, \dots$ aus (5) berechenbar. Man erhält zwei l.u. Lösungen für $L(y) = 0$:

$$y_1(x) = y(x, \varrho_1), \quad y_2(x) = y(x, \varrho_2).$$

- b) $\varrho_1 = \varrho_2$

Hier gilt $f(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)^2$. Es ist $f(\varrho_1 + k) = k^2 \neq 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Wir setzen $c_0 = 1$. Dann können aus (5) die Koeffizienten $c_k(\varrho_1)$ berechnet werden. Man erhält eine Lösung

$$y_1(x) = y(x, \varrho_1) = x^{\varrho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k = x^{\varrho_1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k \right),$$

$0 < x < R$.

Eine hiervon l.u. Lösung kann man etwa so erhalten: Mit den $c_k(\varrho)$ aus (5), $c_0(\varrho) = 1$, gilt für

$$y(x, \varrho) = x^\varrho \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k \right)$$

$$Ly = x^\varrho (\varrho - \varrho_1)^2 \quad (\text{siehe (6)}).$$

Differenziere diese Gleichung nach ϱ :

$$\partial_\varrho L(y) = L(\partial_\varrho y) = x^\varrho \ln x (\varrho - \varrho_1)^2 + 2(\varrho - \varrho_1) x^\varrho$$

Somit ist

$$\begin{aligned} y_2(x) &:= (\partial_\varrho y(x, \varrho))|_{\varrho=\varrho_1} \\ &= \ln(x) y_1(x) + x^{\varrho_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} c'_{k+1}(\varrho_1) x^k \end{aligned}$$

eine zweite l.u. Lösung von $L(y) = 0$.

Beispiele: $x^2 y'' - 2xy' + \frac{9}{4}y = 0$
 $xy'' + y' + xy = 0$.

- c) $\varrho_1 - \varrho_2 = N \in \mathbb{N}$

Es ist $f(\varrho_1 + k) = k(k + N) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit kann man $y_1(x) = y(x, \varrho_1)$ wie vorher mit $c_0 = 1$ und (5) berechnen.

Aus (5) ist $c_N(\varrho_2)$ wegen $f(\varrho_2 + N) = 0$ i. a. nicht zu berechnen, es sei denn (siehe (5)), es gilt

$$g_N(\varrho_2) := - \sum_{m=0}^{N-1} ((m + \varrho_2)p_{N-m} + q_{N-m})c_m = 0 \quad (7)$$

Ist dies der Fall, wähle $c_N(\varrho_2)$ beliebig und berechne mit (5) alle $c_k(\varrho_2)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq N$, etwa mit $c_0 = 1$. Man erhält so $y_2(x) = y(x, \varrho_2)$, eine von y_1 l.u. Lösung.

Im Normalfall ($g_N(\varrho_2) \neq 0$) liefert (5) den Widerspruch $0 = g_N(\varrho_2)$.

Wir können dann eine von y_1 l.u. Lösung y_2 so berechnen:

Wähle $c_0 = \varrho - \varrho_2$ und berechne $c_k(\varrho)$ aus (5) und bilde mit diesen c_k

$$y(x, \varrho) := x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varrho)x^k \quad (x > 0).$$

Es gilt (siehe (6)):

$$\begin{aligned} Ly &= (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)^2 x^\varrho \\ \Rightarrow \partial_\varrho(Ly)|_{\varrho=\varrho_2} &= L(\partial_\varrho y(x, \varrho))|_{\varrho=\varrho_2} = 0 \end{aligned}$$

$y_2(x) = \partial_\varrho y(x, \varrho)|_{\varrho=\varrho_2}$ ist eine zweite von y_1 l.u. Lösung. Man macht sich klar, dass mit einer Konstanten a

$$y_2(x) = x^{\varrho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(\varrho_2)x^k + a(\ln x)y_1(x)$$

gilt.

Bemerkung Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz ((2)) liefert also in jedem Fall direkt mindestens eine Lösung von (1). Grundsätzlich kann dann stets eine zweite l.u. Lösung mit dem Ansatz

$$y_2(x) = y_1(x)v(x)$$

(Reduktion der Ordnung/ 7.2) durch Berechnung von v bestimmt werden.

8.6 Zusammenfassender Satz für den Fall reeller ϱ_1, ϱ_2 und Stelle der Bestimmtheit x_0

Gegeben ist die DGL

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

mit

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x - x_0)^j, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x - x_0)^j, \quad |x - x_0| < R.$$

Dann gibt es für $0 < |x - x_0| < R$ definierte l.u. Lösungen y_1, y_2 der Form

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\varrho_1} u_1(x)$$

$$y_2(x) = A \cdot |x - x_0|^{\varrho_1} u_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\varrho_2} u_2(x)$$

mit $u_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} (x - x_0)^k$, $c_0^{(j)} = 1$ ($j = 1, 2$).

ϱ_1, ϱ_2 ($\varrho_1 \geq \varrho_2$) sind die Nullstellen von $f(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0$.

Im Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ ist $A = 1$.

Im Fall $\varrho_1 - \varrho_2 \in \mathbb{N}$ kann $A = 1$ oder $A = 0$ sein.

Im Fall $\varrho_1 \neq \varrho_2$, $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$ ist $A = 0$.

ergänzende Literatur (auch hinsichtlich Konvergenzfragen)

Rabenstein: Introduction to Ordinary Differential Equations

Chorlton: Ordinary Differential and Difference Equations

9 Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

9.1 Das Problem. Die Vorgaben.

J ist ein Intervall in \mathbb{R} , $\vec{q}: J \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ ein stetiges Vektorfeld und $P: J \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)} (\mathbb{C}^{(n,n)})$ eine stetige matrixwertige Funktion: $P(t) = ((P(t))_{jk})$, $(P(t))_{jk} = p_{jk}(t)$. P stetig bedeutet, dass $p_{jk}: J \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ für alle j, k stetig sind.

Es seien $t_0 \in J$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ fest. Gesucht ist $\vec{y} \in C^1(J)$, $\vec{y}: J \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$, mit

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= P(t)\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Zur Übung schreibe man (1) explizit etwa für $n = 4$ mit Komponenten auf.

Satz 1 Das Problem (1) hat unter den Voraussetzungen: P, \vec{q} stetig auf J genau eine Lösung \vec{y} , die auf J definiert ist.

9.2 Ein Spezialfall von (1) ist das Problem aus 6.2, Satz 1.

Es seien $r, a_1, \dots, a_n \in C(J)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Es sei $y \in C^n(J)$ eine

Lösung des Problems

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \sum_{j=1}^n a_j(t) y^{(n-j)} &= r(t), \quad t \in J, \\ y^{(j)}(t_0) &= b_{j+1} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $y_1 := y, \quad y_j := y'_{j-1} \quad (j = 2, \dots, n)$.

Dann gilt mit

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{q}(t) &= r(t) \vec{e}_n, \quad \vec{y}_0 = \vec{b}, \\ \vec{y}'(t) &= \tilde{P}(t) \vec{y} + \vec{q}(t), \quad t \in J \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0\end{aligned}\tag{3}$$

(Dies ist ein spezielles Problem (1).)

Umgekehrt hat man: Ist $\vec{y} \in C^1(J)$ Lösung von (3), so gilt für y_1 (2). Die Theorie für Probleme (1) beinhaltet also die für Probleme (2).

Zur Übung und Erinnerung lies nochmals den Fall $n = 1$ aus Kapitel 2, 2.4. Von dort können wir den Satz über die Struktur der Lösungen von (1) übernehmen:

Satz 2 Die allgemeine Lösung von:

$$\vec{y}'(t) = P(t) \vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J,\tag{4}$$

erhält man, indem man zur allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\vec{y}'(t) = P(t) \vec{y}(t), \quad t \in J,\tag{5}$$

eine spezielle Lösung \vec{y}_P der Gleichung (4) addiert. (vgl. auch Satz 11 / 6.6)

Zum homogenen Problem:

$$\vec{y}'(t) = P(t) \vec{y}(t), \quad t \in J,\tag{5}$$

n Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ von (5) fassen wir zu einer (m, n) -Matrix $Y(t) = [\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)]$ zusammen und betrachten $W(t) = W(t; \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) := \det Y(t)$. Es gilt (11. Ü, A 4)

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur} P(s) ds\right).$$

Hieraus liest man ab

Satz 3 Sind $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ Lösungen des homogenen Systems (5), so gilt mit $W(t) = \det(\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t))$: $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ sind l.u. auf $J \Leftrightarrow W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$.

Satz 4

- a) $\mathcal{L}_0 = \{\vec{y}: J \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{y}'(t) = P(t) \vec{y}(t)\}$ ist ein n -dimensionaler Vektorraum.
- b) n Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ bilden genau dann eine Basis von \mathcal{L}_0 (ein Fundamentalsystem), wenn gilt $\det(\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)) \neq 0$ für ein (und damit für alle) $t \in J$. In diesem Fall ist $\vec{y}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{y}_j(t)$ ($c_j \in \mathbb{R}$ beliebig, konstant) die allgemeine Lösung von (5).

9.3 Matrixfunktionen

(Wir schreiben $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{(m,n)}$. Wir könnten im Folgenden ebenso mit $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{(m,n)}$ arbeiten. Siehe auch die Formulierungen unter 9.1)

J sei ein Intervall in \mathbb{R} .

$P : J \rightarrow \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt Matrixfunktion. Die Elemente von $P(t)$ werden wie in HM II (siehe auch schon 9.1 hier) durch $(P(t))_{jk}$ oder auch durch $p_{jk}(t)$ bezeichnet. Die $p_{jk} : J \rightarrow \mathbb{R}$ sind die Komponentenfunktionen. Stetigkeit, Diff'barkeit, Integrierbarkeit, Konvergenz werden über die Komponenten(funktionen) erklärt:

P ist stetig, diff'bar, integrierbar, falls p_{jk} für jedes Paar j, k stetig, diff'bar, integrierbar ist.

$P'(t)$ ist die durch $(P'(t))_{jk} := p'_{jk}(t), t \in J$, definierte (m, n) - Matrix. Analog ist $\int_a^b P(t) dt$ die (m, n) - Matrix mit den Elementen

$$\left(\int_a^b P(t) dt \right)_{jk} := \int_a^b p_{jk}(t) dt.$$

Ü:

1. Sind $P, Q : J \rightarrow \mathbb{R}^{(m,n)}$ diff'bar auf J , so gilt $(P + Q)' = P' + Q'$.
2. $P : J \rightarrow \mathbb{R}^{(m,n)}, Q : J \rightarrow \mathbb{R}^{(n,l)}$ seien diff'bar auf J . Es gilt $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

9.4 Reihen von Matrizen. Konvergenz. Norm.

Definition C_1, C_2, \dots sei eine Folge von (m, n) -Matrizen,

$$(C_k)_{jl} = c_{jl}^{(k)}, j = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$$

$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ heißt **konvergent**, falls alle mn Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} c_{jl}^{(k)}$ konvergieren.

$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ ist dann die (m, n) -Matrix $C = (c_{jl})$ mit $c_{jl} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jl}^{(k)}$ ($= (C)_{jl}$).

Definition (Norm auf $\mathbb{C}^{(m,n)}$)

$$\|A\| = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n |(A)_{jl}|, A \in \mathbb{C}^{(m,n)}.$$

Satz 5

- 1) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, A, B \in \mathbb{C}^{(m,n)}$
- 2) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, A \in \mathbb{C}^{(m,n)}, B \in \mathbb{C}^{(n,p)}$
- 3) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

Folgerung Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Satz 6 Es sei (C_k) eine Folge von (m, n) -Matrizen. Dann gilt: Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$.

9.5 $\exp(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Definition Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist die (n, n) -Matrix $\exp(A)$ wie folgt definiert:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Hierbei ist $A^0 = E$. Für $\exp(A)$ wird auch e^A geschrieben.

Bemerkungen

- 1) $\exp(E) = eE$
- 2) $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$
- 3) $\exp(0) = E$

9.6 Die DGL für e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Satz 7 Für $E(t) = e^{tA}$ gelten:

$$E'(t) = E(t)A = AE(t).$$

9.7 Die Matrixdgl. $F'(t) = AF(t)$. Eindeutigkeitsatz.

Satz 8 Für jede (n, n) -Matrix A und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{tA} e^{-tA} = E.$$

Also: e^{tA} ist eine reguläre (n, n) -Matrix mit $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

Satz 9 (Eindeutigkeitsatz)

Es seien A, B konstante (n, n) -Matrizen. Dann ist F mit $F(t) = \exp(tA)B$ die einzige Matrixfunktion, für die

$$\begin{aligned} F'(t) &= AF(t), \quad t \in J, \\ F(0) &= B \end{aligned}$$

erfüllt sind.

9.8 $\exp(A)\exp(B)$

Satz 10 Für (n, n) -Matrizen A, B mit $AB = BA$ gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

Folgerung

$$\exp(sA)\exp(tA) = \exp((s+t)A), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

9.9 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 11 Es seien A eine konstante (n, n) -Matrix, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$. Das AWP

$$\begin{aligned}\vec{y}'(t) &= A\vec{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(a) &= \vec{y}_0\end{aligned}$$

hat die Lösung $\vec{y}(t) = e^{(t-a)A}\vec{y}_0$.

9.10 Berechnen von $\exp(tA)$

- 1) Mit $\mathbf{A} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ((n, n) -Diagonalmatrix mit den Spalten $\lambda_k \vec{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$) gilt

$$e^{tA} = \mathbf{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 2) A sei **diagonalisierbar**. Es gibt dann eine reguläre Matrix C derart, dass $C^{-1}AC = D$ (Diagonalmatrix) ist (vgl. HM II).

Dann gilt:

$$e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

9.11 Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 12 Es seien A eine konstante (n, n) -Matrix, $\vec{q}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{q} = \vec{q}(t)$, eine stetige Vektorfunktion, $a \in J$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Das AWP: Gesucht ist eine C^1 -Vektorfunktion $\vec{y} = \vec{y}(t)$ mit

$$\begin{aligned}\vec{y}'(t) &= A\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \\ \vec{y}(a) &= \vec{y}_0:\end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung, die explizit durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-a)A}\vec{y}_0 + \int_a^t e^{(t-\tau)A}\vec{q}(\tau) d\tau, \quad t \in J,$$

gegeben ist.

9.12 Das Problem (1) aus 9.1. Variation der Konstanten.

- 1) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_0 = 0$ gesetzt werden. Es liegt also das Problem

$$\begin{aligned}\vec{y}'(t) &= P(t)\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \\ \vec{y}(0) &= \vec{y}_0\end{aligned} \tag{1}$$

vor. (mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 9.1)

- 2) Das homogene Problem (1) ($\vec{q} = \vec{0}$) besitzt n l.u. Lösungen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n$. Die hiermit gebildete reguläre (n, n) -Matrix

$$\phi(t) := [\vec{\phi}_1(t), \vec{\phi}_2(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)], \quad t \in J,$$

heißt **Fundamentalmatrix** für das homogene System.

$\vec{y}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\vec{y}_0$ ist die Lösung des homogenen Problems (1):

$$\vec{y}'(t) = P(t)\vec{y}(t), \quad t \in J,$$

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0.$$

3) Zur Lösung des inhomogenen Problems (1)

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist durch $\vec{y}(t) = \phi(t)\vec{c}$ mit einem beliebigen festen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Zur Lösung von (1) wird der Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$\vec{y}(t) = \phi(t)\vec{v}(t) \tag{2}$$

mit einer zu berechnenden Funktion \vec{v} gemacht.

Die Forderung, dass \vec{y} Lösung von (1) ist, und die Eigenschaft von ϕ : $\phi'(t) = P(t)\phi(t)$, ergeben $\vec{v}'(t) = \phi^{-1}(t)\vec{q}(t)$. Man erhält die Lösung von (1) in der Form

$$\vec{y}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\vec{y}_0 + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{q}(s)ds, \quad t \in J. \tag{3}$$

Bemerkung: $\vec{y}_p(t) := \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{q}(s)ds$, $t \in J$ löst das Problem

$$\vec{y}'(t) = P(t)\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J,$$

$$\vec{y}(0) = \vec{0}.$$

Die Funktion $\phi(t)\phi^{-1}(s)$ heißt **die Greensche Funktion** des AWP. Sie wird durch $G(t, s)$ bezeichnet:

$$G(t, s) = \phi(t)\phi^{-1}(s), \quad t, s \in J.$$

Als Funktion von t ist $G(t, s)$ Lösung des Matrix-Problems

$$Y'(t) = P(t)Y(t), \quad t \in J$$

$$Y(s) = E.$$

Ü:

- Schreibe 9.12 auf mit $P(t) = A = \text{konstant}$. Dann erhält man wieder die Lösungsdarstellung aus Satz 12, 9.11. Welches ist die Greensche Funktion für das Problem aus Satz 12, 9.11 ?
- Man mache die Probe: Rechne nach, dass \vec{y} aus (3) Lösung von (1) ist.

10 Die Transportgleichung. Die Wellengleichung.

10.1 Einfache Beispiele

- Wir schreiben $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ als Argument von Funktionen, $\vec{x} \in D$ (Gebiet) $\subset \mathbb{R}^n$. α sei konstant.

$$(D_1 u)(\vec{x}) = \alpha$$

hat die Lösungen

$u(\vec{x}) = \alpha x_1 + w(x_2, \dots, x_n)$ mit einer beliebigen C^1 -Funktion w in den Variablen x_2, x_3, \dots, x_n .

- α konstant. Die C^2 -Lösungen von

$$(D_1 D_2 u)(x_1, x_2) = \alpha$$

sind durch

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 + w_2(x_2) + w_1(x_1)$$

mit beliebigen C^1 -Funktionen w_1, w_2 einer Variablen gegeben.

Ü: Welches sind die Lösungen von $(D_1 D_2 u)(\vec{x}) = \alpha$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$?

- Es sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, und $\alpha = \text{konstant}$ gegeben.

Die Lösungen $u \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, der Gleichung

$$\vec{a} \cdot \nabla u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j D_j u(\vec{x}) = \alpha$$

sind wie folgt gegeben:

$$u(\vec{x}) = \alpha (A^{-1} \vec{x})_1 + w((A^{-1} \vec{x})_2, \dots, (A^{-1} \vec{x})_n)$$

mit einer beliebigen C^1 -Funktion w in $(n-1)$ Variablen. A ist eine reguläre (n, n) -Matrix, deren 1. Spalte \vec{a} ist.

Ü: Spezialisieren Sie dies für den Fall $n = 2$.

10.2 Die Transportgleichung

Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $u = u(x, t)$, mit

$$(D_2 u)(x, t) \pm c(D_1 u)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Hier ist c eine positive Konstante.

Satz 1 Lösungen der DGLn

$$(1) (D_2u)(x, t) + c(D_1u)(x, t) = 0,$$

$$(2) (D_2u)(x, t) - c(D_1u)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

sind $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ bzw. $u(x, t) = \psi(x + ct)$ mit beliebigen C^1 -Funktionen φ, ψ .

Satz 2 Für $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ seien

$$(D_2u)(x, t) - c(D_1u)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Dann gilt $u(x, t) = 0$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Satz 3 Alle C^1 -Lösungen der Gleichung

$$(D_2u)(x, t) - c(D_1u)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man durch $u(x, t) = \psi(x + ct)$ mit beliebigen Funktionen $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Ü: Formulieren und begründen Sie Sätze 2 und 3 für die Gleichung (1).

Bemerkung Um die Operation (Vorschrift), die in (1), (2) auf u wirkt, zu betonen, schreiben wir auch

$$\text{anstelle von (1): } (D_2 + cD_1)u(x, t) = 0,$$

$$\text{anstelle von (2): } (D_2 - cD_1)u(x, t) = 0.$$

10.3 Die inhomogene Transportgleichung

Gegeben sind $f = f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2)$, $g = g(x) \in C(\mathbb{R})$.

Gesucht sind $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, mit

$$(P) \begin{cases} (D_2 - cD_1)u(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Satz 4 Sind $g \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, so wird durch

$$u(x, t) = g(x + ct) + \int_0^t f(x - c(s - t), s) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

die Lösung von (P) gegeben.

Bemerkung u aus Satz 4 ist $u = u_1 + u_2$, wobei u_1 Lösung des Problems

$$\begin{aligned}(D_2 - cD_1)u(x, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= g(x)\end{aligned}$$

und u_2 Lösung des Problems

$$\begin{aligned}(D_2 - cD_1)u(x, t) &= f(x, t), \\ u(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

ist.

$u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, kann man so erhalten (Methode von **Duhamel**):

Löse für jedes s mit $0 \leq s \leq t$ das Problem

$$\begin{aligned}(D_2 - cD_1)u(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq s \\ u(x, s) &= f(x, s), & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nenne diese Lösung $w(x, t; s)$. Dann gilt $u_2(x, t) = \int_{s=0}^t w(x, t; s) ds$. (1)

Es ist $w(x, t; s) = f(x - c(t - s); s)$. (Vergleiche mit A4, 8. Üblatt)

Ü: Man mache die Probe, dass u_2 aus (1) Lösung des Problems

$$\begin{aligned}(D_2 - cD_1)u(x, t) &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

ist.

10.4 Die eindimensionale Wellengleichung

1. $c > 0$ sei eine gegebene Konstante. Gesucht ist $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$(D_2^2 - c^2 D_1^2)u(x, t) = 0. \quad (1)$$

Es werden neue Variablen ξ, τ eingeführt durch

$$\begin{aligned}x &= c(\xi + \tau), & t &= \xi - \tau \\ \xi &= \frac{1}{2c}(x + ct), & \tau &= \frac{1}{2c}(x - ct)\end{aligned}$$

Für die Funktion v , $v(\xi, \tau) := u(c(\xi + \tau), \xi - \tau)$, gilt, wenn u der Gleichung (1) genügt:

$$(D_1 D_2 v)(\xi, \tau) = 0.$$

Man erhält $v(\xi, \tau) = w_1(\xi) + w_2(\tau)$ mit beliebigen genügend diff'baren Funktionen w_1, w_2 einer Variablen. Rücktransformation auf die Variablen x, t liefert den

Satz 5 Jede C^2 -Lösung $u = u(x, t)$ der Gleichung

$$(D_2^2 u)(x, t) - c^2 (D_1^2 u)(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1)$$

hat die Form $u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$ mit beliebigen C^2 -Funktionen φ, ψ .

Bemerkung: Anderes Vorgehen zur Lösung von (1).

(1) wird so geschrieben:

$$(D_2 - cD_1)(D_2 + cD_1)u(x, t) = 0 \quad (1)$$

Hiermit wird das Lösen von (1) zurückgeführt auf das Lösen zweier Probleme (gemäß 10.2, 10.3).

Berechne $v = v(x, t)$ aus

$$(D_2 - cD_1)v(x, t) = 0 \quad (2)$$

und dann $u = u(x, t)$ aus

$$(D_2 + cD_1)u(x, t) = v(x, t). \quad (3)$$

(1) ist äquivalent zu (2), (3).

(2) wird mit Satz 3 und (3) mit Satz 4 gelöst. Man findet den Satz 5 wieder.

2. Zur Lösung **der eindimensionalen inhomogenen Wellengleichung**

$$(D_2^2 u)(x, t) - c^2(D_1^2 u)(x, t) = f(x, t) \quad (4)$$

gehen wir wie in der vorhergehenden Bemerkung vor. (4) wird als System von Gleichungen erster Ordnung geschrieben:

$$(D_2 v)(x, t) - c(D_1 v)(x, t) = f(x, t) \quad (5)$$

$$(D_2 u)(x, t) + c(D_1 u)(x, t) = v(x, t) \quad (6)$$

Mit **Satz 4** kann u berechnet werden.

Satz 6 Die Lösung u der Gleichung (4), die $u(x, 0) = D_2 u(x, 0) = 0$ erfüllt, ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{s=0}^t \left(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau, s) d\tau \right) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Die **Cauchysche Anfangswertaufgabe (AWA)**.

Die **d'Alembertsche Formel**.

Satz 7 Die Cauchysche AWA für die eindimensionale Wellengleichung

$$\left. \begin{aligned} (D_2^2 - c^2 D_1^2)u(x, t) &= f(x, t), & (x, t) &\in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R} \\ D_2 u(x, 0) &= h(x), & x &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

mit gegebenen genügend gutartigen Funktionen f, g, h hat die Lösung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{s=0}^t \left(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau, s) d\tau \right) ds \end{aligned} \quad (8)$$

Bemerkungen

- 1) (8) erhält man durch Kombination der Ergebnisse vorher und indem man (7) in zwei Probleme zerlegt:
Das Problem mit $f = 0$ und das Problem mit $g = h = 0$. Die Summe der Lösungen dieser (halbhomogenen) Probleme ist (8).
- 2) (8) mit $f = 0$ heißt d' Alembertsche Formel.
- 3) **Ü:** Rechnen Sie nach, dass u aus (8) (7) erfüllt.
- 4) **Ü:** Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals mit f .

11 Die quasilineare PDGL 1. Ordnung. Das zugehörige Cauchysche AWP.

11.1 Problemformulierung

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $G_0 = \{(x, y) | (x, y, z) \in G\}$. Gegeben sind

$a, b \in C^1(G)$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x, y, z) \neq \vec{0}, (x, y, z) \in G$.

Es liegt die Gleichung

$$a(x, y, z)p + b(x, y, z)q = c(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G \quad (1)$$

vor.

$u \in C^1(G_0)$ heißt **Lösung** von (1), falls für alle $(x, y) \in G_0$

$$a(x, y, u(x, y))D_1u(x, y) + b(x, y, u(x, y))D_2u(x, y) = c(x, y, u(x, y)) \quad (2)$$

erfüllt ist.

11.2 Geometrische Deutung. Charakteristiken.

1) Es sei u eine Lösung von (1). Die Fläche $z = u(x, y)$, $(x, y) \in G_0$, heißt auch **Integralfläche der DGL (1)**.

2) $P = (x_0, y_0, z_0) \in G$; $a_0 := a(x_0, y_0, z_0)$, $b_0 = b(x_0, y_0, z_0)$, $c_0 = c(x_0, y_0, z_0)$.

Die Ebenen, die die Gerade (die **Mongesche Gerade** von (1) durch P)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \text{ enthalten, kommen als Tangentialebenen}$$

in P an Integralflächen $z = u(x, y)$ durch P in Frage.

3) Eine glatte Kurve mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Tangenten die Mongesche Gerade der DGL (1) im Berührungspunkt ist, heißt **Charakteristik der**

DGL (1). Lösungen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $t \in J$, der DGLn

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(\vec{r}(t)), \quad t \in J, \quad (3)$$

sind Parameterdarstellungen der Charakteristiken.

(3) heißt auch **charakteristisches DGLsystem**. Beschreibt $\vec{r}(t) (\subset G)$ eine Charakteristik, so heißt $\vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} (\subset G_0)$ die zugehörige **charakteristische Grundkurve**.

Satz 1 Es seien gegeben: $a, b, c \in C^0(G)$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ in G , und $u \in C^1(G_0)$.

Dann gilt: u ist Lösung der DGL (1) genau dann, wenn durch jeden Punkt der Fläche $z = u(x, y)$ eine ganz in der Fläche verlaufende Charakteristik geht.

Satz 2 $a, b, c \in C^1(G)$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ in G . Es seien $u \in C^1(G_0)$ eine Lösung der DGL (1) und $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in J$ mit $\vec{r}_0(t) \in G_0$, die Darstellung einer Charakteristik der DGL (1). γ und die Integralfläche $F : z = u(x, y)$, $(x, y) \in G_0$, haben einen Punkt gemeinsam. Dann liegt γ ganz in F .

Folgerung Sind F_1 und F_2 Integralflächen von (1) mit $P \in F_1 \cap F_2$, so ist $F_1 \cap F_2$ eine Charakteristik von (1).

11.3 Das Cauchysche Anfangswertproblem (AWP).

1) Es ist in $G \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Raumkurve Γ durch

$$\begin{aligned} x &= f(s), y = g(s), z = h(s), s \in I \\ (f, g, h &\in C^1, f'^2 + g'^2 + h'^2 \neq 0) \end{aligned}$$

gegeben.

Gesucht ist eine Lösung u von (1) mit

$$u(f(s), g(s)) = h(s). \quad (4)$$

(Γ liegt in der Fläche $F : z = u(x, y)$). Die Lösung ist gesucht in einer Umgebung des Punktes $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$.

2) Es gelte $a, b, c \in C^1(G)$ (nahe (x_0, y_0, z_0)). Für jedes s aus einer Umgebung von s_0 sei

$$x = X(s, t), y = Y(s, t), z = Z(s, t) \quad (5)$$

die Lösung der charakteristischen DGLn

$$\left. \begin{aligned} D_2 X(s, t) &= a(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ D_2 Y(s, t) &= b(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ D_2 Z(s, t) &= c(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \end{aligned} \right\} (6)$$

mit $X(s, 0) = f(s)$, $Y(s, 0) = g(s)$, $Z(s, 0) = h(s)$.

Gilt

$$J = \det \begin{pmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (7)$$

so wird durch (5) lokal (bei P_0) eine Lösung von (4) in Parameterdarstellung gegeben. (7) gewährleistet auch, dass man aus den ersten beiden Gleichungen (5) $s = S(x, y)$, $t = T(x, y)$ berechnen kann, so dass durch $z = Z(S(x, y), T(x, y)) =: u(x, y)$ eine explizite Lösungsdarstellung gegeben ist.

Bemerkung Ist $J = 0$, so existiert eine Lösung von (4) nur, falls Γ bei P_0 eine Charakteristik ist.

11.4 Die lineare homogene DGL für n Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Gegeben sind $a_j \in C^1(G_0)$ ($G_0 \subset \mathbb{R}^n$). Gesucht ist $u \in C^1(G_0)$ mit

$$\sum_{j=1}^n a_j(\vec{x}) D_j u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in G_0. \quad (8)$$

Mit $\vec{a}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1(\vec{x}) \\ a_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ a_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ lautet das charakteristische DGL System

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}(\vec{x}(t))$$

$$\dot{z}(t) = 0$$

Satz 3 Die im Gebiet G_0 (des \vec{x} -Raumes) stetig diff'bare Funktion u ist in G_0 Lösung der DGL (8) genau dann, wenn gilt: alle in G_0 verlaufenden charakteristischen Grundkurven von (8) sind Höhenlinien von u (d.h. es gilt $u(\vec{x}(t)) = \text{const}$, falls $\vec{x} = \vec{x}(t)$ charakteristische Grundkurve ist).

11.5 Eine Möglichkeit, (1) zu lösen

Satz 4 Ist $w = f(x, y, z)$ mit $D_3 f \neq 0$ Lösung der DGL $a(x, y, z)D_1 w + b(x, y, z)D_2 w + c(x, y, z)D_3 w = 0$, so wird durch $f(x, y, u(x, y)) = \text{const}$ implizit eine Lösung von

$$a(x, y, z)p + b(x, y, z)q = c(x, y, z) \quad (1)$$

gegeben.

11.6 Beispiele