Aufgabe 1: Es wird verwendet: $|a+b|^2 = |a|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{a}b) + |b|^2$, $a, b \in \mathbb{C}$
und $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$

a) $\left|\frac{z-1}{z+2}\right| \geq 2 \iff |z-1|^2 \geq 4|z+2|^2$
$\iff 3|z|^2 + 18\,\mathrm{Re}(z) + 15 \leq 0$
$\iff (x+3)^2 + y^2 \leq 4$ Das Innere des Kreises um $z=-3$ mit Radius 2.

b) $\left|\frac{z}{1+z}\right| = \alpha \iff |z|^2 = \alpha^2(1+|z|^2+2\mathrm{Re}(z))$
$\iff (x^2+y^2)(1-\alpha^2) - 2\alpha^2 x = \alpha^2$

1. Fall: $\alpha = 1$ $\rightarrow$ $x = \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ (Gerade)

2. Fall: $\alpha \neq 1$ $\left(x - \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}$

Kreislinie des Kreises um $\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, 0\right)$ (um $z = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$) mit Radius $\frac{\alpha}{|1-\alpha^2|}$.

Aufgabe 2: $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ $(x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z))$.

Bild von $y = \alpha$ $(= \text{konst}, \in (0, 2\pi))$:
$\exp(x+i\alpha) = e^x(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $-\infty < x < \infty$
Die von 0 ausgehende Halbgerade, die mit der positiven reellen Achse den Winkel α einschließt.

Bild von $x = \beta$ $(= \text{konst}, \in \mathbb{R})$
$\exp(\beta + iy) = e^\beta e^{iy}$, $0 < y < 2\pi$
Die Kreislinie des Kreises: Mittelpunkt 0, Radius e^β: ohne den Punkt $z = e^\beta$.

Aufgabe 3

$f(z) = z|z|$

$f(x+iy) = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2} = u(x,y) + i\,v(x,y)$

mit $u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$

a) f ist reell diff'bar, wenn u und v differenzierbar sind.
Das ist der Fall, da $D_1 u = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D_2 u = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$D_1 v = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D_2 v = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ existieren und
für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$ stetig sind ($D_1u(0,0) = D_2u(0,0) = D_1v(0,0) = D_2v(0,0) = 0$)

f ist also für alle $z \in \mathbb{C}$ reell diff'bar.

b) f ist komplex diff'bar, wenn f reell diff'bar (✓) ist und zusätzlich die Cauchy-Riemann Dgln erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} D_1 u &\overset{!}{=} D_2 v \\ D_2 u &\overset{!}{=} -D_1 v \end{aligned}\right\}$$ Das gilt nur für $z=0$ ($x=y=0$)

f ist nur in $z=0$ komplex diff'bar.
(f ist für kein $z \in \mathbb{C}$ holomorph)

Aufgabe 4

$$\nabla u(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \nabla v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$f = u + iv = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} \underset{\substack{\uparrow \\ z=x+iy}}{=} z + \frac{x-iy}{|z|^2} = z + \frac{\bar z}{z\bar z} = z + \frac{1}{z}$$

f ist holomorph für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da z und $\frac{1}{z}$ dies sind.

Aufgabe 5 (Übung zur Kettenregel)

$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ sollen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ den Gleichungen $\boxed{(*)}$ $\underline{D_1 u = D_2 v \text{ und } D_2 u = -D_1 v}$ genügen.
Werden Polarkoordinaten r, φ durch $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ eingeführt, so erhält man die Funktionen $\tilde{u}, \tilde{v}$:
$\tilde{u}(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $\tilde{v}(r,\varphi) := v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.
Die Frage ist: Wenn für u und v $\boxed{(*)}$ erfüllt sind, welchen Gleichungen genügen $\tilde{u}, \tilde{v}$?
Durch Verwenden der Kettenregel aus HM II erhält man:
(die Argumente bei u, v sind $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$, bei $\tilde{u}, \tilde{v}$ entsprechend r, φ)

$$\boxed{(**)} \left\{ \begin{aligned} D_1 u &= \cos\varphi\, D_1\tilde{u} - \frac{1}{r}\sin\varphi\, D_2\tilde{u} \\ D_2 u &= \sin\varphi\, D_1\tilde{u} + \frac{1}{r}\cos\varphi\, D_2\tilde{u} \end{aligned} \right. \quad \text{, mit } v, \tilde{v} \text{ analog}$$

Verwendet man jetzt $\boxed{(*)}$, so rechnet man nach:

$$\left.\begin{aligned} D_1 u &= D_2 v \\ D_2 u &= -D_1 v \end{aligned}\right\} \text{werden zu:} \qquad \begin{aligned} r D_1\tilde{u}(r,\varphi) &= D_2\tilde{v}(r,\varphi) \\ D_2\tilde{u}(r,\varphi) &= -r D_1\tilde{v}(r,\varphi) \end{aligned}$$

Beispiel: $f(z) = z^n \underset{z = re^{i\varphi}}{\overset{\uparrow}{=}} r^n e^{in\varphi}$, also: $\tilde{u}(r,\varphi) = r^n \cos n\varphi$, $\tilde{v}(r,\varphi) = r^n \sin n\varphi$ $(n \in \mathbb{Z})$

<u>Ü</u>: Nach Vorlesung gilt mit kartesischen Koordinaten: $f' = D_1 u + i D_1 v$.
Was wird hieraus mit Polarkoordinaten?