Aufgabe 1: Es ist gegeben $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = 4(x^2-y^2)+4x+1+e^{-x}\cos y$

Gesucht ist $u = u(x,y)$ mit $D_1 u \,(= D_2 v) = -8y - e^{-x}\sin y$ (1)

$D_2 u \,(= -D_1 v) = -8x - 4 + e^{-x}\cos y$ (2)

Aus (1) $\to$ $u(x,y) = -8yx + e^{-x}\sin y + \varphi(y)$

$\to$ $D_2 u(x,y) = -8x + e^{-x}\cos y + \varphi'(y) \underset{(2)}{\overset{!}{=}} -8x + e^{-x}\cos y - 4$

$\to$ $\varphi(y) = -4y + c$ $\quad c \in \mathbb{R}$ konst.

$\to$ $\underline{u(x,y) = -8yx + e^{-x}\sin y - 4y + c}$

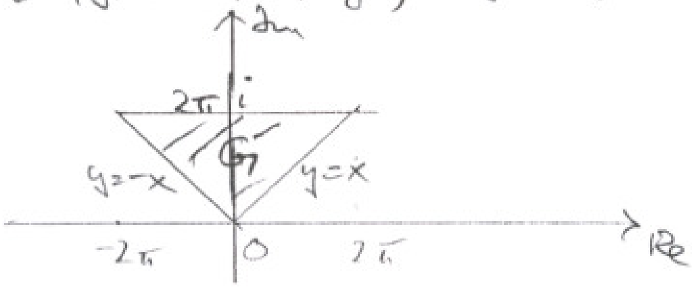
$\to$ $f = u + iv = 4i(x^2-y^2+2ixy) + e^{-x}i(\cos y - i\sin y) + 4i(x+iy) + c + i$

$\underline{w = f(z) = i(4z^2 + e^{-z} + 4z + 1) + c}$ $\quad (c \in \mathbb{R}$, beliebig$)$

Aufgabe 2

a) $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$. Also $\operatorname{Re}(z^2) < 0 \Longleftrightarrow |x| < |y|$

$\to$ $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < y,\ 0 < y < 2\pi\}$



b) exp ist in jedem Streifen der Dicke 2π parallel zur reellen Achse schlicht.

c) (24.5, 1., Beispiele b)

$$I(\exp(G)) = \iint_G |e^{x+iy}|^2 \, d(x,y)$$

$$= \int_{y=0}^{2\pi} \int_{x=-y}^{y} e^{2x} \, dx\, dy = \underline{\tfrac{1}{2}(\cosh 4\pi - 1)}$$

Aufgabe 3 (Bezeichnungen Vorlesung 124.4, Bemerkungen)

a) $\phi(z) = z^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{\varphi(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{\psi(x,y)}$

$\phi'(z) = 2z = \overline{f}(z) \rightarrow f(z) = 2\overline{z} = \underbrace{2x}_{u} \underbrace{-2y}_{v} i$

$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \nabla\varphi$ Geschwindigkeitsfeld

Stromlinien: $2xy = c$ (konst) Strömung an einer $90°$ Ecke

b) $f(z) = \frac{1}{z} \rightarrow \overline{f}(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$

$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \nabla\varphi$

$\phi'(z) = \overline{f}(z) = \frac{1}{z} \rightarrow \phi(z) = \log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

$\rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ Äquipotentiallinien: Kreise um 0

$\psi(x,y) = \arg(x+iy)$

Stromlinien $\arg(x+iy) = $ Const

$\Longleftrightarrow$ $y = cx$ (c konst) ($x \neq 0$)

und $x = 0$

Aufgabe 4

a) $e^{\frac{1}{z}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \rightarrow \frac{1}{z} = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \rightarrow z = -\frac{2i}{(1+4k)\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\underset{m}{i} = e^{i\frac{\pi}{2}} \overset{!}{=} i^z = e^{z\log i} = e^{z(\ln|i| + i\arg(i) + 2k\pi i)}$

$= e^{iz(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \Rightarrow zi(\frac{\pi}{2}+2k\pi) - i\frac{\pi}{2} = 2m\pi i$ $(k,m \in \mathbb{Z})$

$\rightarrow z = \frac{4m+1}{4k+1}$ $(k,m \in \mathbb{Z})$

2. Ü HM III Lösungsskizzen

4b) Wir verwenden $\underline{\log z = \ln|z| + i\arg(z);\ z\neq 0,\ -\pi<\arg(z)<\pi}$

Es ist dann $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg i(i-1) = \arg(-1-i) = -3\frac{\pi}{4}$,

$\arg(i-1) = 3\frac{\pi}{4}$

1. $\underline{(i(i-1))^i} = e^{i\log(i(i-1))} = e^{i(\ln|i(i-1)| + i\arg(i(i-1)))}$

$= \underline{e^{i\ln\sqrt{2}}\, e^{+3\frac{\pi}{4}}}$

2. $\underline{i^i(i-1)^i} = e^{i(\ln|i| + i\arg(i))}\, e^{i(\ln|i-1| + i\arg(i-1))}$

$= e^{-\frac{\pi}{2}}\, e^{i\ln\sqrt{2}}\, e^{-3\frac{\pi}{4}} = \underline{e^{-\frac{5\pi}{4}}\, e^{i\ln\sqrt{2}}}$

3. Mit (2.) $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ folgt $\underline{i^{(i^i)}} = e^{i^i\log(i)}$

$= e^{e^{-\frac{\pi}{2}}\, i\frac{\pi}{2}} = \underline{\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}$

4. Es ist (vorher) $\log(i) = i\frac{\pi}{2}$

$\to \log(\log i) = \ln\left|i\frac{\pi}{2}\right| + i\arg\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$

$\to \underline{(\log i)^i} = e^{i\log(\log(i))} = e^{-\frac{\pi}{2} + i\ln\frac{\pi}{2}}$

$= \underline{e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\ln\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)\right)}$

5. $\underline{i^{\frac{1}{i}}} = i^{-i} = e^{-i\log(i)} = e^{-i\,i\frac{\pi}{2}} = \underline{e^{\frac{\pi}{2}}}$

Aufgabe 5

a) $z(t) = z_0 + te^{i\varphi}$ $(t\in\mathbb{R})$. Gerade durch z_0 mit Richtung $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$.

b) $S_g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bezeichne die Funktion: „Spiegeln an g“.

2. Ü HM III Lösungsskizzen

1. Fall g = reelle Achse: $S_{\mathbb{R}}(z) = \overline{z}$

2. Fall g sei Gerade durch 0: $z(t) = te^{i\varphi}$ $(t \in \mathbb{R})$

1) Drehe $\mathbb{C}$ um $-\varphi$ (mit Drehpunkt 0) $(g \to \mathbb{R})$

2) Spiegele an $\mathbb{R}$

3) Drehe zurück d.h. drehe um $+\varphi$

Also: $S_g(z) = e^{i\varphi} S_{\mathbb{R}}(e^{-i\varphi} z) \underset{1.\text{Fall}}{=} e^{i\varphi} e^{i\varphi} \overline{z} = e^{2i\varphi} \overline{z}$

3. Fall Der allgemeine Fall $g: z(t) = z_0 + te^{i\varphi}$

1) Verschiebe um z_0 (Übergang zum 2. Fall)

2) Spiegele an der Ursprungsgeraden $g - z_0$ (2. Fall)

3) Mache die Verschiebung rückgängig

$$S_g(z) = S_{g-z_0}(z - z_0) + z_0$$

$$= e^{2i\varphi}\overline{(z - z_0)} + z_0$$

$$\underline{S_g(z) = e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0}$$