

### 3. Übungsblatt

#### Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

##### Aufgabe 1:

Gegeben sind  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  und  $N = (0, 0, 1) \in S$ . Die  $(x_1, x_2)$ -Ebene wird durch  $z = x_1 + ix_2$  mit der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  identifiziert.

Der Punkt  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  wird durch eine Gerade mit  $N$  verbunden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Geraden mit  $S$  in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$ .

##### Aufgabe 2:

Gegeben ist  $M = \{T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$ .

Zeigen Sie:

$M$  ist mit der Verknüpfung „ $\circ$ “ (Hintereinanderausführung von Abbildungen) eine Gruppe.

##### Aufgabe 3:

Bestimmen Sie unter der Abbildung  $T, w = T(z)$ , das Bild in der  $w$ -Ebene des Gebietes  $G$ :

a)  $T(z) = \frac{z}{1-z}, G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\},$

b)  $T(z) = \frac{1+z}{1-z}, G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, |z+1+i| > 1, \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 0\},$

c)  $T(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{z-1-i}}, G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| < 1, \operatorname{Im}(z) > 1\},$

d)  $T(z) = i \left( \frac{i+z}{i-z} \right)^{\frac{2}{3}}, G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \sqrt{2}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$

#### Aufgabe 4:

Eine Möbius-Transformation  $w = T(z)$  bildet ab:  $X \rightarrow \infty$ .

Skizzieren Sie das Bild der gegebenen Konfiguration in der  $w$ -Ebene.

#### Aufgabe 5:

a) Bilden Sie  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r, \operatorname{Im}(z) > 0\}$  auf ein Rechteck ab.

b) Bilden Sie  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$  auf die obere Halbebene ab.