Aufgabe 1

$z = x + iy$ sei ein beliebiger Punkt der (x_1, x_2)-Ebene $= \mathbb{C}$.

$N = (0, 0, 1)$ sei der Nordpol der Kugel $S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, ist die Verbindungsgerade

N mit z. Sie schneidet die Kugel in $P(z)$, dem Punkt auf g, dessen Parameterwert t der Gleichung $t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 = 1$ genügt $\to t = 0$ (N) und $t = \frac{2}{1+|z|^2}$

$$\to: \quad P(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), \quad z \in \hat{\mathbb{C}}.$$

$$(P(\infty) = (0, 0, 1))$$

Die Zuordnung: $P: \hat{\mathbb{C}} \to S$ heißt stereographische Projektion.

<u>Zusatz</u>: Berechne $P^{-1}: S \to \hat{\mathbb{C}}$

Aufgabe 2

Es sind nachzuweisen: <u>1)</u> $T_1, T_2 \in \mathcal{M} \longrightarrow T_1 \circ T_2 \in \mathcal{M}$

<u>2)</u> $id \in \mathcal{M}$, <u>3)</u> $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{M} \to (T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$

<u>4)</u> Zu $T \in \mathcal{M}$ gibt es $T^{-1} \in \mathcal{M}$ $(T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = id)$

<u>Zu 1)</u> $T_j = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$ mit $\Delta_j = a_j d_j - b_j c_j \neq 0$ $\quad (j = 1, 2)$: <u>$T_j \in \mathcal{M}$</u>

$$(T_1 \circ T_2)(z) = T_1(T_2(z)) = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

<u>$T_1 \circ T_2 \in \mathcal{M}$</u>, da $\Delta = (a_1 a_2 + b_1 c_2)(c_1 b_2 + d_1 d_2) - (a_1 b_2 + b_1 d_2)(c_1 a_2 + d_1 c_2)$
$= \Delta_1 \Delta_2 \neq 0$

Lösungsskizzen 3. Ü HM III

zu 2) $id(z) = z = \frac{1\cdot z + 0}{0\cdot z + 1}$ mit $\Delta = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \neq 0$

also: $id \in \mathcal{M}$

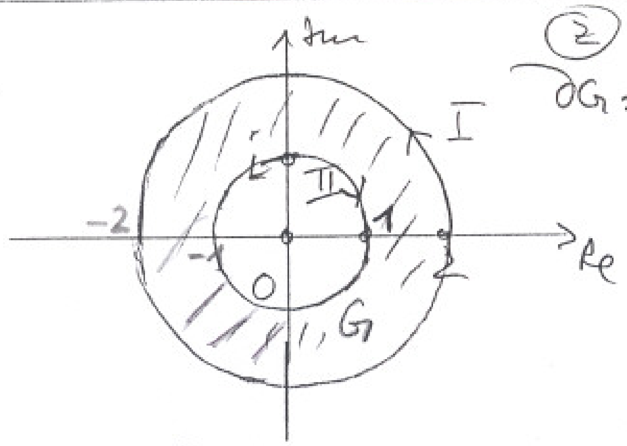
zu 4) $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w$ mit $ad - bc \neq 0$ ist nach z aufzulösen $\rightarrow$ $z = \frac{dw-b}{-cw+a} = T^{-1}(w)$

$T^{-1} \in \mathcal{M}$, da $da - (-b)(-c) \neq 0$ nach Vor. $T \in \mathcal{M}$.

Warum schreibe ich zu 3) nichts? Bzw.: Was ist zu 3) zu schreiben?

Aufgabe 3

a)

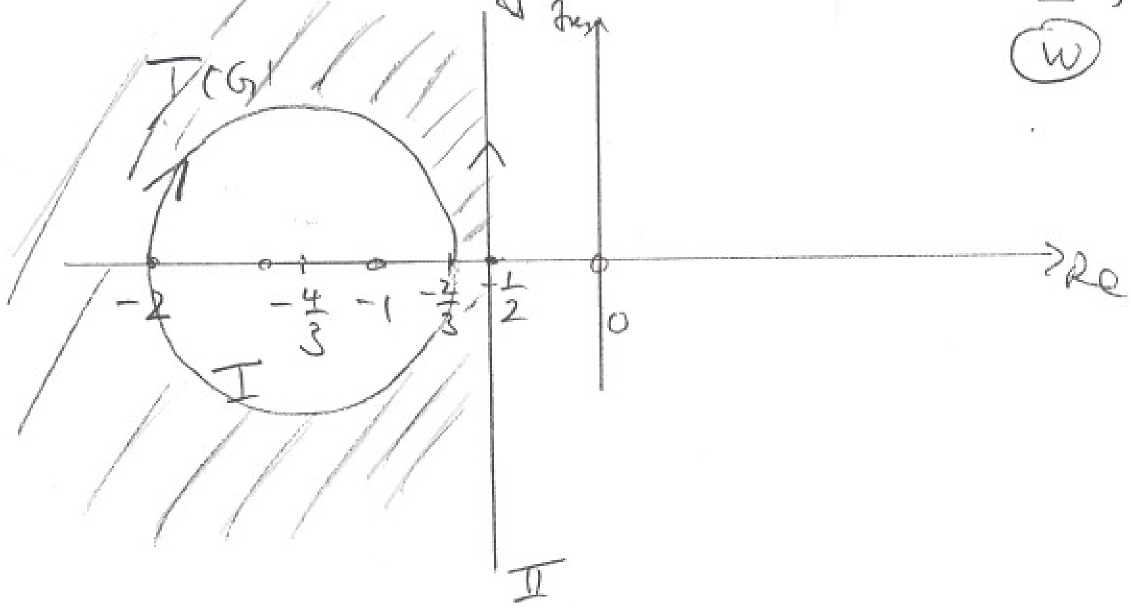


(z) $\partial G = I \cup II$

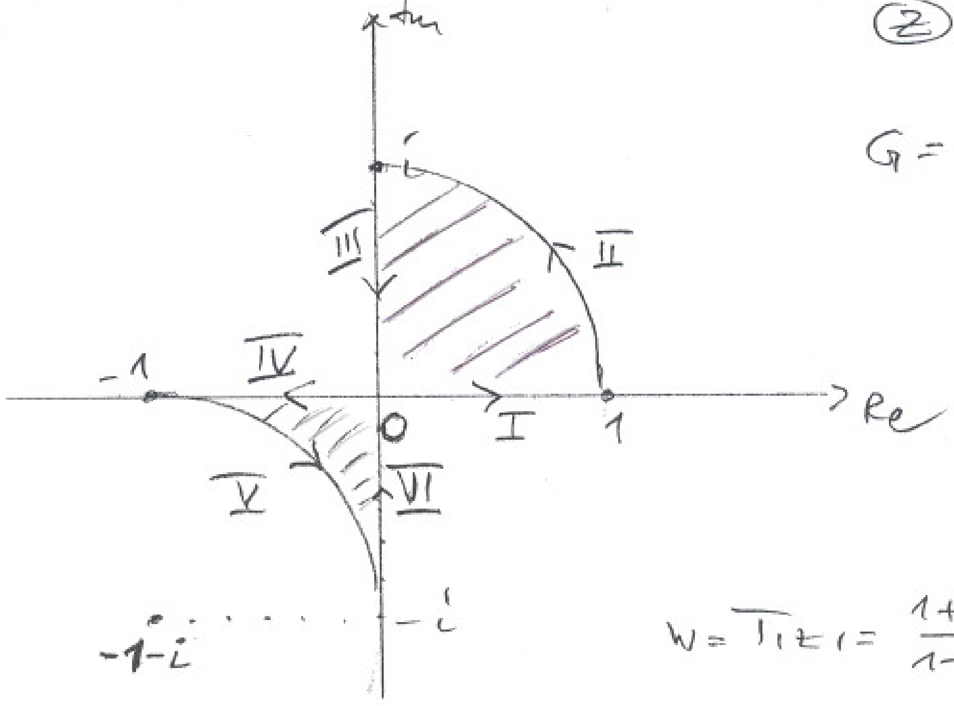
$w = T(z) = \frac{z}{1-z}$: $I \rightarrow$ Kreis um $-\frac{4}{3}$ durch $T(-2) = -\frac{2}{3}$ und $T(2) = -2$

$II \rightarrow$ Gerade durch $T(-1) = -\frac{1}{2}$, $\perp$ zu $\mathbb{R}$

(w)



A 3 b)



$w = T(z) = \frac{1+z}{1-z}$

I $\longrightarrow$ reelle Achse von $1 \longrightarrow \infty$

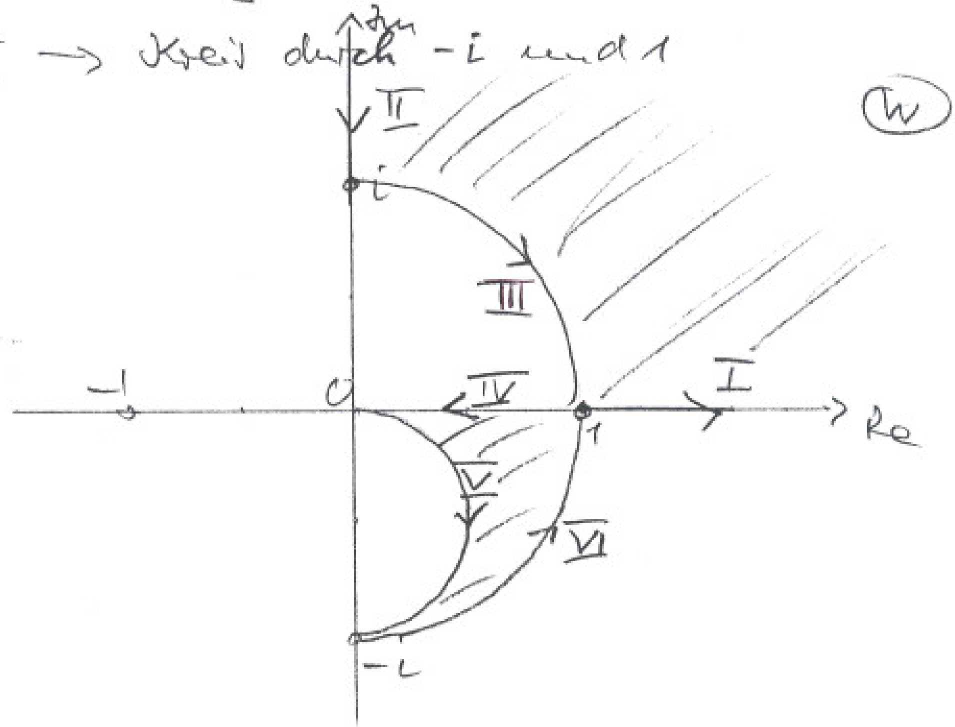
II $\longrightarrow$ gerade $\perp \mathbb{R}$ durch 0, d.h. imaginäre Achse von ∞i bis $T(i) = i$.

III $\longrightarrow$ Kreis durch $T(i) = i$ und $T(0) = 1$ $\perp$ imaginärer und reeller Achse

IV $\longrightarrow$ reelle Achse von $T(0) = 1$ bis $T(-1) = 0$

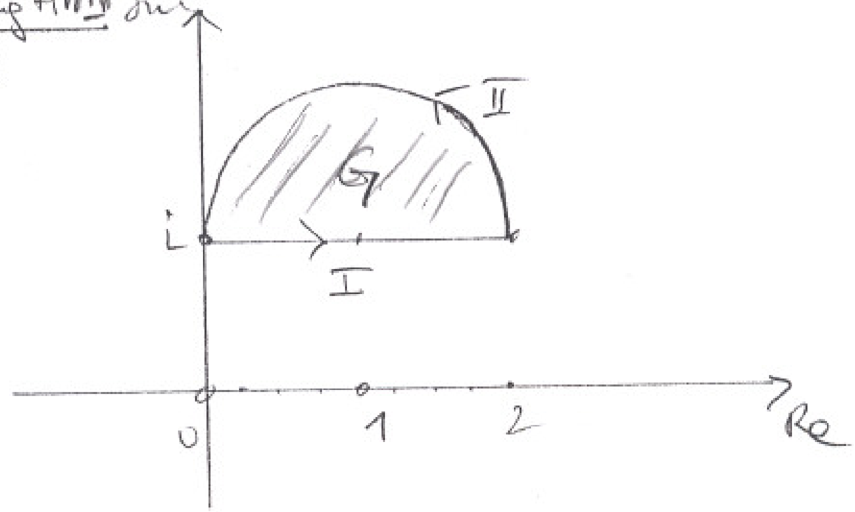
V $\longrightarrow$ Kreis durch 0 und $T(-i) = -i$

VI $\longrightarrow$ Kreis durch $-i$ und 1



(2)

A 3 c)



$$w = T(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{z-1-i}}$$

T wird zerlegt: $w_1 = T_1(z) := z-1-i$

$$w_2 = T_2(w_1) = \sqrt{w_1}$$

$$w_3 = T_3(w_2) = \frac{1}{w_2}$$

$$w_4 = w = T_4(w_3) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{w_2}$$

$$\left(w = \overbrace{T_4(T_3(T_2(T_1(z))))}^{=T(z)} = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) \right)$$

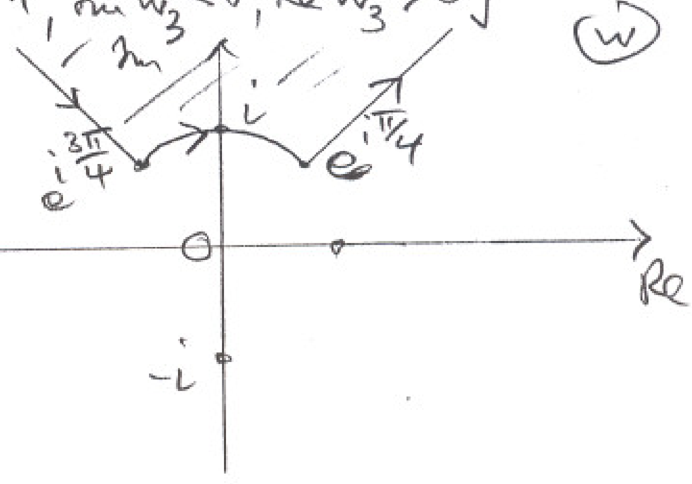
Nimmt man für $\sqrt{\ }$ den Zweig mit $\sqrt{1} = 1$:
$(\to \sqrt{-1} = i)$

$T_1(G) = \{w_1 / \ |w_1| < 1,\ \operatorname{Im} w_1 > 0\}$

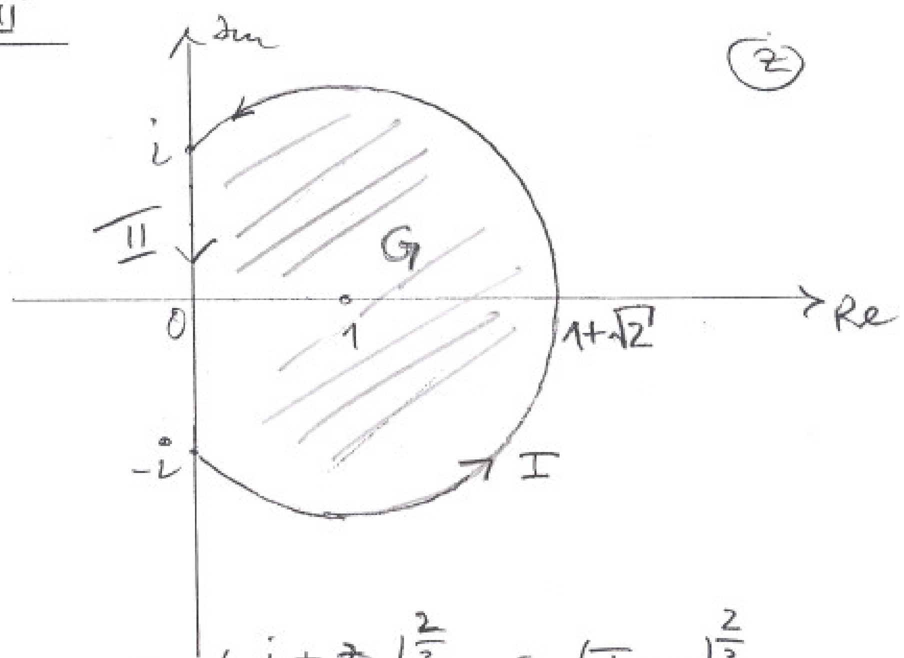
$T_2(T_1(G)) = \{w_2 / \ |w_2| < 1,\ \operatorname{Im} w_2 > 0,\ \operatorname{Re} w_2 > 0\}$

$T_3(T_2(T_1(G))) = \{w_2 / \ |w_3| > 1,\ \operatorname{Im} w_3 < 0,\ \operatorname{Re} w_3 > 0\}$

$\to T(G) = e^{i\frac{3\pi}{4}}\, T_3 \circ T_2 \circ T_1(G)$

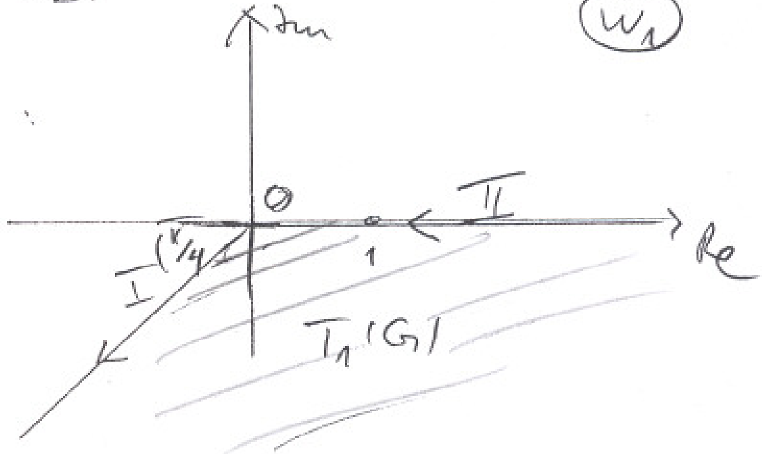


A 3d)



$$w = T(z) = i\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^{\frac{2}{3}} = i\,(T_1(z))^{\frac{2}{3}}$$

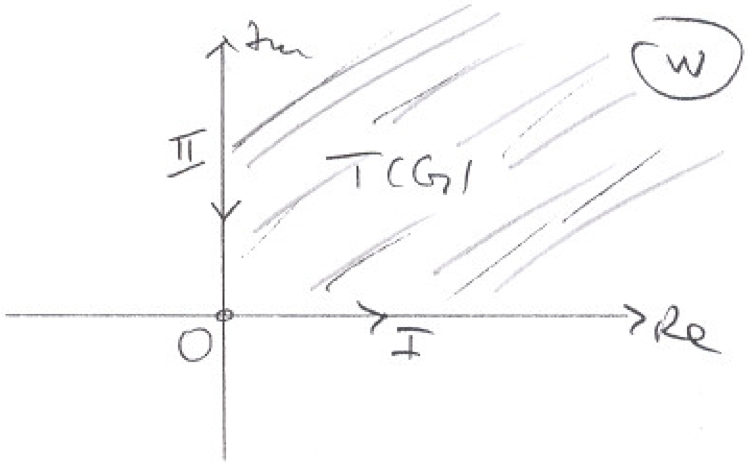
$$w_1 = T_1(z) = \frac{i+z}{i-z}$$



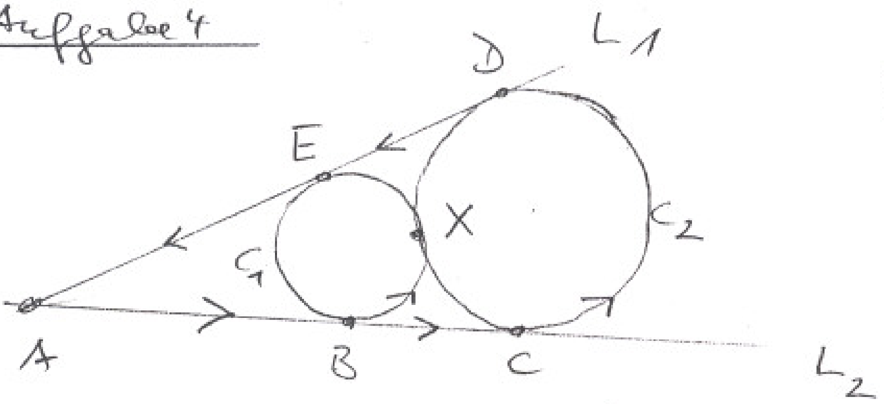
$$w_2 = w_1^{\frac{2}{3}} = |w_1|^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{2}{3}\arg(w_1)} \qquad -\pi < \arg(w_1) < \pi$$

Abbilden von I: $w_2 = |w_1|^{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}} = |w_1|^{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$w = T(z) = i\,w_2$$



Aufgabe 4



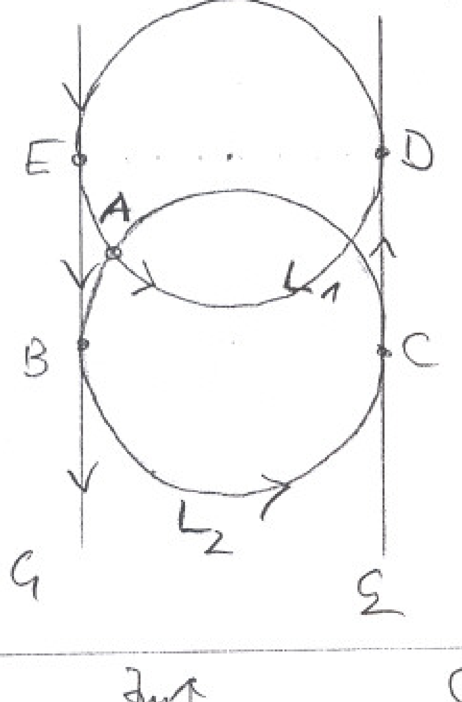
(z)

<u>Vor:</u> $X \xrightarrow{T} \infty$

$T \downarrow$ Möbiustransformation

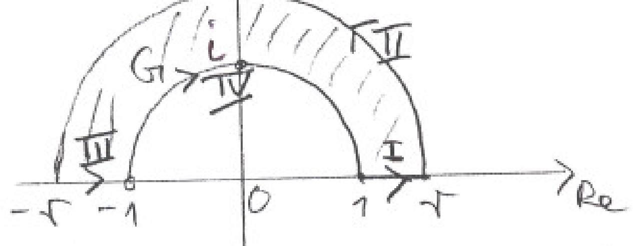
argumentiere mit Kreistreue, Winkeltreue, Orientierungstreue von Möbiustransformationen, mit: ∞ liegt auf jeder Geraden und auf keinem Kreis.

$C_1, C_2 \to$ parallele Geraden, L_1, L_2 werden zu Kreisen

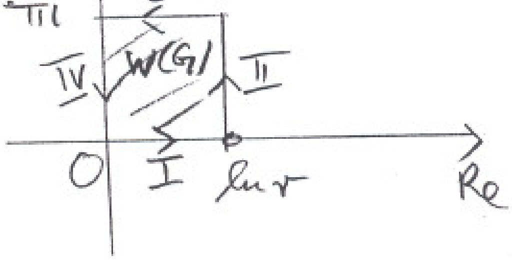


Aufgabe 5

a)



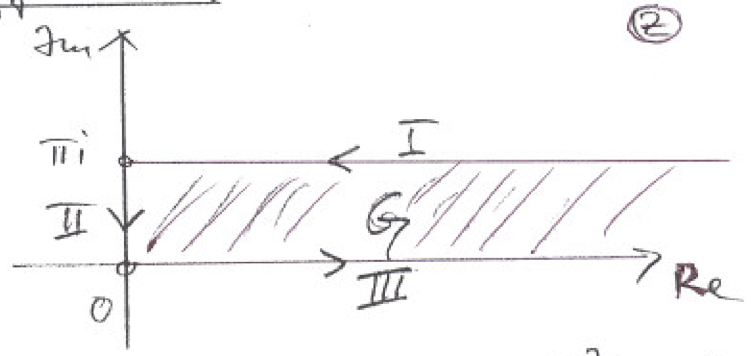
$\longrightarrow$



$w = \log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

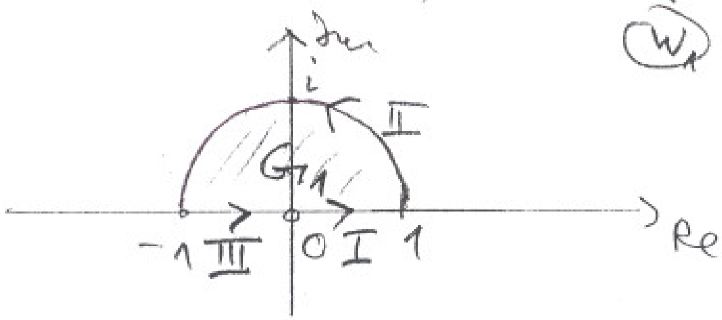
mit $z \neq 0$, $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < 3\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 5 b)



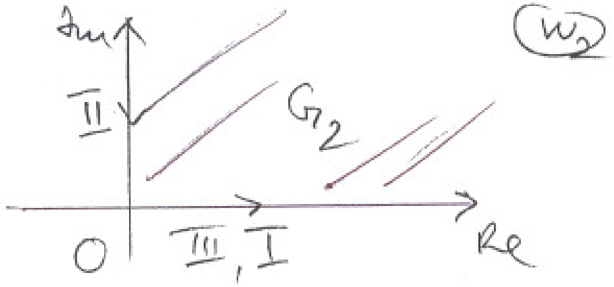
1. Schritt Durch $w_1 = -e^{-z}$ wird G auf

$G_1 = \{ w_1 \mid |w_1| < 1,\ \operatorname{Im} w_1 > 0 \}$ abgebildet.



2. Schritt Durch $w_2 = -\frac{w_1+1}{w_1-1}$ wird G_1 auf

$G_2 = \{ w_2 \mid \operatorname{Re} w_2 > 0,\ \operatorname{Im} w_2 > 0 \}$ abgebildet



3. Schritt: $w = w_2^2$ G_2 wird auf $\{ w \mid \operatorname{Im} w > 0 \}$ abgebildet.

Ergebnis der Aufgabe: $w = w_2^2 = \left(\frac{w_1+1}{w_1-1} \right)^2 = \left(\frac{-e^{-z}+1}{-e^{-z}-1} \right)^2$

oder $w = f(z) = \left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1} \right)^2$ leistet das Verlangte.