Aufgabe 1a)

Nach Vorlesung bildet $w = T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf $\{w \mid |w| = 1\}$ ab.

$\longrightarrow$ $w = L(z) := r\frac{z-i}{z+i} + w_0$ bildet $\mathbb{R}$ auf $\{w \mid |w - w_0| = r\}$ ab. $(r > 0)$

Löse nach z auf: $z = L^{-1}(w)$, vertausche w mit z:

$w = L^{-1}(z) = i\frac{r + z - z_0}{r - (z - z_0)}$ bildet $\{z \mid |z - z_0| = r\}$ auf $\mathbb{R}$ ab.

1b) Durch $w_1 = T_1(z) = z^2$ wird $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ auf $\{w_1 \mid \mathrm{Im}\, w_1 > 0\}$ abgebildet.

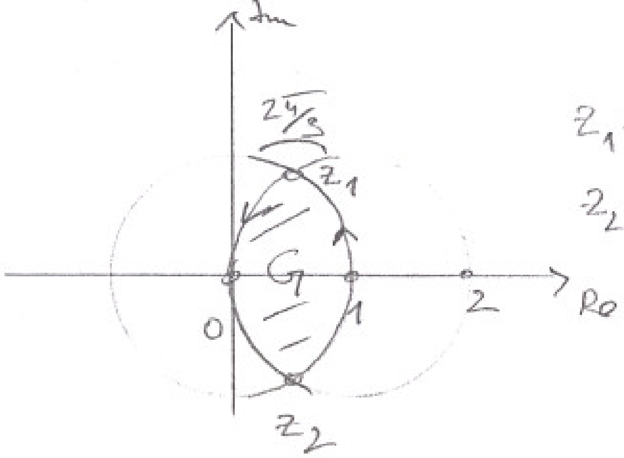
Nach a) wird $\{w_1 \mid \mathrm{Im}\, w_1 > 0\}$ durch $w = T_2(w_1) = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ auf $\{w \mid |w| < 1\}$ abgebildet. Insgesamt bildet

$w = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$

$\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ auf $\{w \mid |w| < 1\}$ ab.

Aufgabe 2

Da sich die Randkurven von G jeweils unter dem Winkel $\frac{2\pi}{3}$ schneiden, ist es mit einer Möbiustransformation nur möglich, G auf den Bereich $\{w_1 \mid 0 < \arg(w_1) < \frac{2\pi}{3}\} =: G_{w_1}$ abzubilden. Das geht wie folgt (z.B.):



(2)

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$w_1 = T(z)$ mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = \infty$, $T(0) = 1$ bildet G konform auf G_{w_1} ab. Es ist $w_1 = T(z) = \frac{z_2}{z_1}\,\frac{z - z_1}{z - z_2}$.

Dann bildet $w = f(w_1) := \sqrt[4]{w_1}$ G_{w_1} auf $\{w \mid 0 < \arg(w) < \frac{\pi}{6}\}$ ab. Hierbei ist $\sqrt[4]{w_1}$ der Hauptwert auf $w_1 \neq 0$, $-\pi < \arg(w_1) < \pi$, also

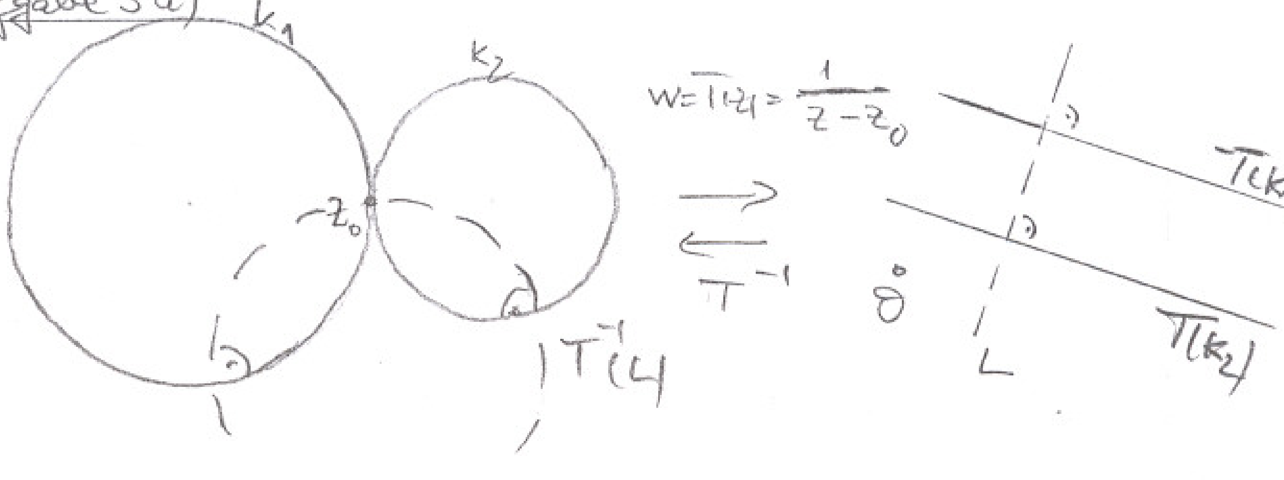
$$\sqrt[4]{w_1} = \sqrt[4]{|w_1|}\,\exp\left(i\,\frac{\arg(w_1)}{4}\right),\quad w_1 \neq 0,\ -\pi < \arg(w_1) < \pi.$$

Setzt man $T(z)$ in f ein, so haben wir erhalten:

$$w = f(z) = \sqrt[4]{e^{-\frac{2\pi}{3}i}\,\frac{z - e^{i\pi/3}}{z - e^{-i\pi/3}}}\,.$$

f bildet G auf $\{w \mid 0 < \arg(w) < \frac{\pi}{6}\}$ ab.

Aufgabe 3 a)

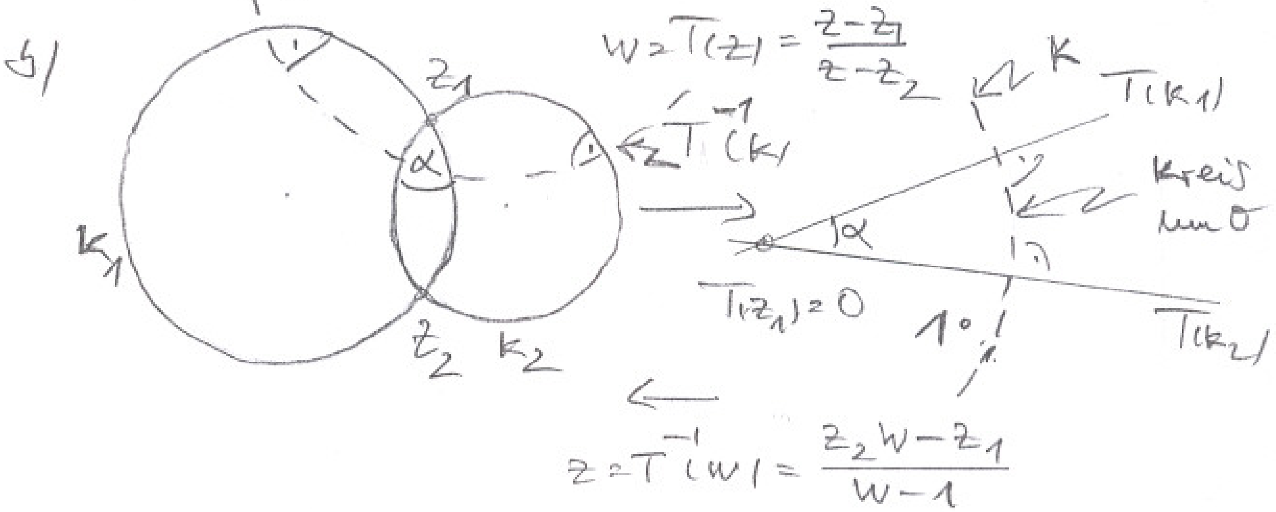


$T(k_1)$, $T(k_2)$ sind parallele Geraden, L Gerade $\perp T(k_1)$ und $T(k_2)$

$\infty \notin k_1$, $\infty \notin k_2$ $\longrightarrow$ $T(\infty) = 0 \notin T(k_1)$
$\notin T(k_2)$

$$w = T(z) = \frac{1}{z - z_0} \longrightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{1 + z_0 w}{w}.$$

Verläuft L nicht durch 0, so wird L durch T^{-1} auf einen Kreis abgebildet, der senkrecht auf k_1 und k_2 steht. Es gibt unendlich viele solcher Geraden L, also auch unendlich viele Kreise, die auf k_1 und k_2 senkrecht stehen. Übrigens gehen alle diese Kreise durch z_0 (Begründung?).

b) 

Jeder Kreis um 0 schneidet die Geraden $T(k_1)$ und $T(k_2)$ senkrecht. Jeder dieser Kreise, der nicht durch $w = 1$ verläuft, wird durch T^{-1} auf einen Kreis $\perp$ zu k_1 und $\perp$ zu k_2 abgebildet.

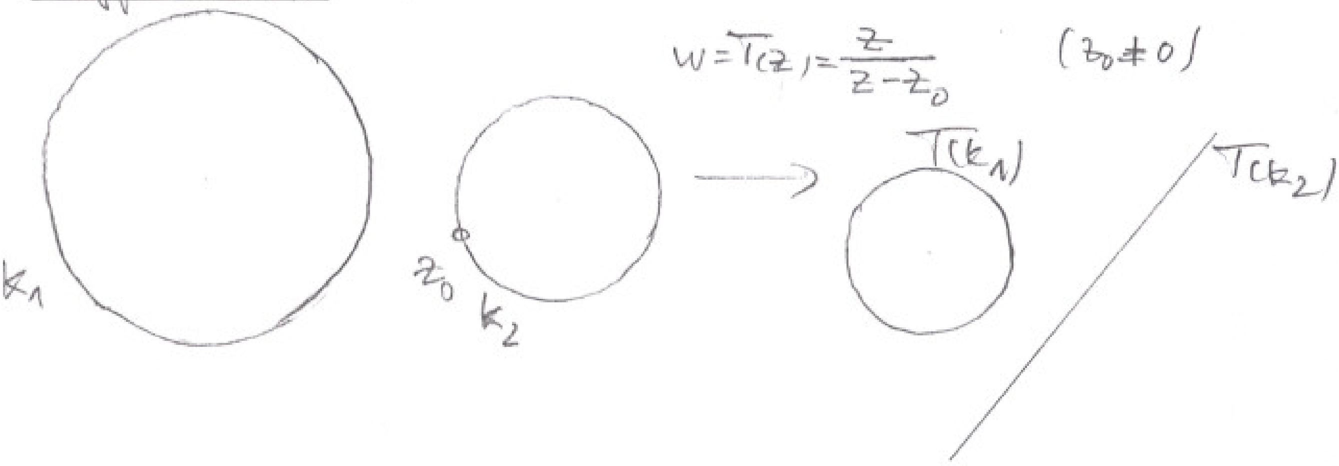
$T(\infty) = 1$

$T^{-1}(1) = \infty$

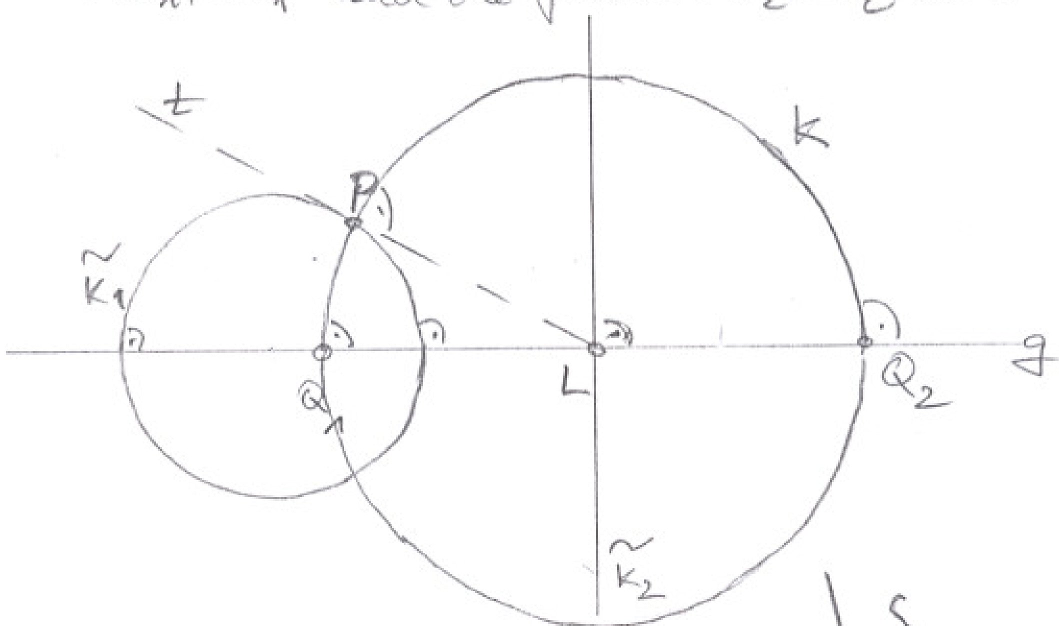
4. Übung HM III WS 08/09 Lösungsskizzen

Aufgabe 4 a)

$w = T(z) = \frac{z}{z - z_0}$ $(z_0 \neq 0)$

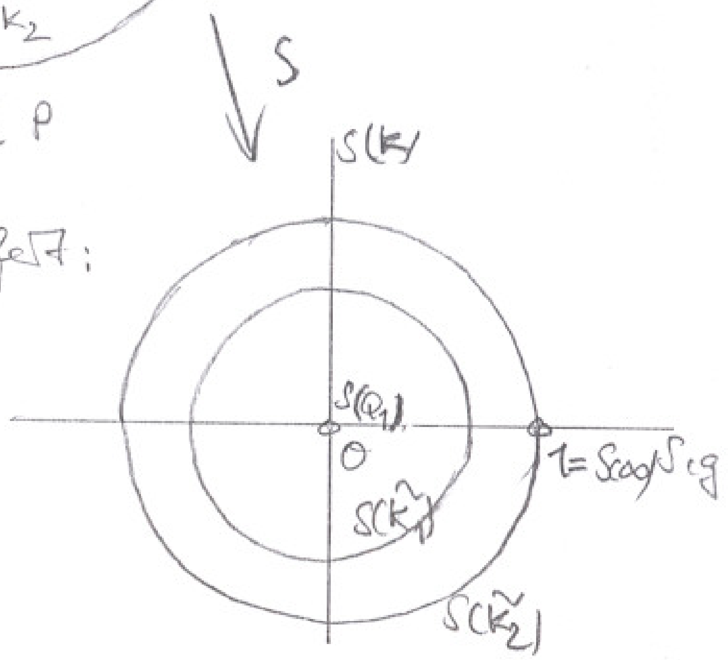


4 b) Bilde gemäß a) K_1 und K_2 auf den Kreis $T(K_1) =: \tilde{K}_1$ und die Gerade $T(K_2) = \tilde{K}_2$ ab.



t ist Tangente an $\tilde{K}_1$ in P

$S(z) := \frac{z - Q_1}{z - Q_2}$ liefert:



4. Übung HM III WS 08/09 Lösungsskizzen

Begründungen:

$Q_2 \in g \longrightarrow S(g)$ ist eine Gerade $\qquad S(g) \perp S(k)$

$Q_2 \in k \longrightarrow S(k)$ ist eine Gerade durch $S(Q_1) = 0$

$Q_2 \notin \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \longrightarrow S(\tilde{k}_1)$ und $S(\tilde{k}_2)$ sind Kreise

g schneidet k in Q_1 rechtwinklig

$\rightarrow S(g)$ schneidet $S(k)$ in $S(Q_1) = 0$ rechtwinklig

g schneidet $\tilde{k}_1$ und k schneidet $\tilde{k}_1$ jeweils in zwei Punkten rechtwinklig

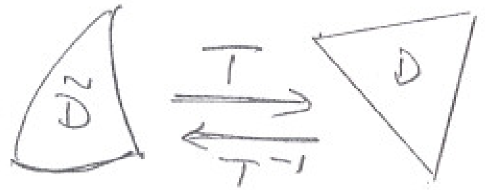
$\rightarrow S(g)$ und $S(k)$ schneiden $S(\tilde{k}_1)$ jeweils in zwei Punkten rechtwinklig

k und g schneiden $\tilde{k}_2$ jeweils in zwei Punkten rechtwinklig (g schneidet $\tilde{k}_2$ in L und ∞)

$\rightarrow S(k)$ und $S(g)$ schneiden $S(\tilde{k}_2)$ jeweils in zwei Punkten rechtwinklig

$\rightarrow S(\tilde{k}_1)$ und $S(\tilde{k}_2)$ sind konzentrische Kreise um $S(Q_1) = 0$, dem Schnittpunkt von $S(g)$ und $S(k)$.

Aufgabe 5



Da $T^{-1} \in \mathcal{M}$ ($\Leftarrow T \in \mathcal{M}$) und da D von Geraden berandet wird, wird $\tilde{D}$ von Geraden oder Kreisen berandet.

Die Randgeraden von D schneiden sich in ∞

$\rightarrow$ Bedingung an $\partial\tilde{D}$: Die Randstücke (Kreise oder Geraden) müssen sich in einem Punkt, dem Punkt $T^{-1}(\infty)$ schneiden.