Lösungsskizzen HMIII WS 08/09 5. Übblatt

Aufgabe 1

a) $z(t) = t-1+it, \; 0 \le t \le 1 \;;\; z'(t) = 1+i$

$f(z) = \bar{z} z^2 = z|z|^2 \rightarrow f(z(t)) = (t-1)^3 + t^3 - t^2 + i(+2t^3 - 2t^2 + t)$

$$\rightarrow \underline{\int_\gamma \bar{z} z^2 dz} = \int_0^1 f(z(t))(1+i)dt = \underline{-\tfrac{2}{3}}.$$

b) $z(t) = e^{i(\pi - t)}, \; 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \;;\; z'(t) = (-i) z(t)$

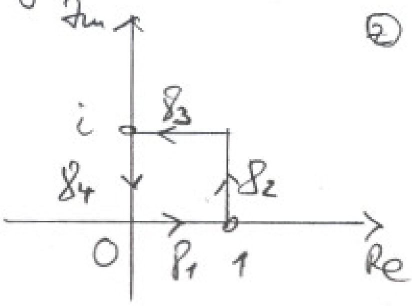
$f(z(t)) = z(t)|z(t)|^2 = z(t)$

$$\rightarrow \underline{\int_\gamma \bar{z} z^2 dz} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-i) z(t)^2 dt = -ie^{2\pi i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2it} dt$$

$$= (-i)\left(-\tfrac{1}{2i}\right)\left(e^{-i\pi} - 1\right) = \underline{-1}$$

c) γ = Rand des Quadrats mit den Ecken $0, 1, 1+i, i$.

②



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$\gamma_1: z(t) = t, \; 0 \le t \le 1, \quad z'(t) = 1$

$\gamma_2: z(t) = 1+it, \; 0 \le t \le 1 \;;\; z'(t) = i, \; |z(t)|^2 = 1+t^2$

$\gamma_3: z(t) = 1-t+i, \; 0 \le t \le 1 \;;\; z'(t) = -1 \;;\; |z(t)|^2 = (1-t)^2+1$

$\gamma_4: z(t) = (1-t)i, \; 0 \le t \le 1 \;;\; z'(t) = -i, \; |z(t)|^2 = (1-t)^2$

$$\rightarrow \underline{\int_\gamma |z|^2 dz} = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+t^2) i\, dt + \int_0^1 ((1-t)^2+1)(-1) dt + \int_0^1 (1-t)^2 (-i) dt$$

$$\underline{= -1+i}$$

Aufgabe 2

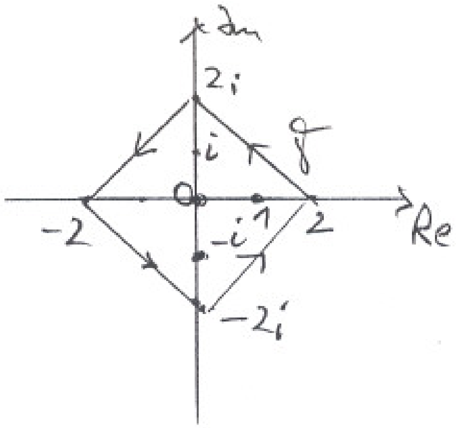
a) $$\oint_{|z|=1} \frac{\cos \pi z}{z}\, dz = 2\pi i \cos \pi z\big|_{z=0} = 2\pi i \quad \text{(C.I.F. (Satz 3, 24.7))}$$

b) $$\frac{z^3}{z^2+1} = z^3 \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \to \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-i}\, dz - \frac{1}{2i}\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+i}\, dz \overset{\text{C.I.F.}}{=} \frac{1}{2i} 2\pi i\, z^3\big|_{z=i} - \frac{1}{2i} 2\pi i\, z^3\big|_{z=-i}$$

$$= \underline{-2\pi i}$$

c)



$$\frac{(z+1)^2}{(z^2+1)(z-1)} = \text{Partialbruchzerlegung}$$

$$= -\frac{1+i}{2}\frac{1}{z-i} - \frac{1-i}{2}\frac{1}{z+i} + 2\frac{1}{z-1}$$

→ (wieder mit C.I.F.) $$\oint_\gamma \frac{(z+1)^2}{(z^2+1)(z-1)}\, dz$$

$$= -\frac{1+i}{2} 2\pi i - \frac{1-i}{2} 2\pi i + 2\cdot 2\pi i = \underline{2\pi i}$$

Aufgabe 3

a) $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, beschreibt die Einheitskreislinie

gesucht ist eine Funktion f, die

$$(\cos t)^{2n} = f(z(t))\, z'(t) = f(z(t))\, i z(t) \quad \text{erfüllt.}$$

Wir wählen $f(z) := \frac{1}{iz}\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^{2n}$ wegen

$$(\cos t)^{2n} = \left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\right)^{2n} = \frac{1}{iz(t)}\left(\frac{z(t) + \frac{1}{z(t)}}{2}\right)^{2n} i z(t)$$

$$\to \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt = \oint_{|z|=1} f(z)dz = \frac{1}{i2^{2n}} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

Mit dem Binomischen Satz gilt: $\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k}\left(\frac{1}{z}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}$$

Nach Vorlesung bleibt bei der Integration nur der Summand mit $k=n$ übrig: $\underline{\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt} = \frac{1}{i2^{2n}}\binom{2n}{n} 2\pi i = \underline{\frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}}$

b) (Idee/Vorgehen wie vorher)

Gesucht ist f mit $\frac{1}{2+\sin t} = f(z(t))iz(t)$ mit $z(t)=e^{it}$.

$$\frac{1}{2+\sin t} = \frac{1}{2+\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})} = \frac{2i}{4i+z-\frac{1}{z}} = \underbrace{\frac{2}{z^2+4iz-1}}_{f(z)} iz$$

also: $\underline{\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4iz-1} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$

(mit $z_{1/2} = i(-2\pm\sqrt{3})$) = (Partialbruchzerlegung)

$$= 2\left(\underbrace{\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i\sqrt{3}}}{z-z_1} dz}_{= 2\cdot 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{3}}} + \oint_{|z|=1} \frac{-\frac{1}{2i\sqrt{3}}}{z-z_2} dz\right)$$

$$= 2\cdot 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{3}} + 0 = \underline{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} = \underline{\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}}$$

c) (Vorgehen wie oben)

$\underline{\int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt} =$ (mit $z=e^{it}$, $z'(t)=iz(t)$)

$$= \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{iz}\,dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz \overset{C.I.F.}{=} \frac{1}{i}2\pi i\, e^z\Big|_{z=0} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Aufgabe 4

γ habe die Darstellung $z = z(t)$, $a \le t \le b$. γ sei stückweise glatt.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{f(z(t))\,z'(t)}_{=:h(t)}\,dt \qquad \overline{\underline{(*)}}$$

1) Wir zeigen: Ist $h:[a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt:

$$\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| \le \int_a^b |h(t)|\,dt.$$

$$\int_a^b h(t)\,dt = r e^{i\varphi} \qquad \text{(Polardarstellung von } \int_a^b h(t)\,dt\text{)}$$

$$\to\ r = \left|\int_a^b h(t)\,dt\right| = \int_a^b e^{-i\varphi} h(t)\,dt \qquad (\in \mathbb{R})$$

$$= \operatorname{Re}\int_a^b e^{-i\varphi} h(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} h(t)\right)dt$$

$$\overset{HM\,I}{\le} \int_a^b |h(t)|\,dt.$$

2) $$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \overset{(*)\text{ und }1)}{\le} \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt$$

$$\le \max_{z\in\gamma}|f(z)| \underbrace{\int_a^b |z'(t)|\,dt}_{\text{Länge von }\gamma} \checkmark$$

Aufgabe 5)

Mit $z(t) = Re^{it}$ und $|e^z| = e^{Re(z)}$ und $f(z) = e^{iz^2}$ hat man:

$$|f(z(t))| = e^{Re(iR^2 e^{2it})} = e^{-R^2 \sin 2t} \leq e^{-R^2 \frac{4t}{\pi}} \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4},$$

da für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ gilt $\sin 2t \geq \frac{4t}{\pi}$.

Mit $z'(t) = iRe^{it}$ und somit $|z'(t)| = R$ erhält man unter Verwendung der vorherigen Aufgabe 4 (dort 1)):

$$\left|\int_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2 \frac{4t}{\pi}} dt$$

$$= R\left(-\frac{\pi}{4R^2}\right)\left[e^{-R^2 \frac{4t}{\pi}}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\pi}{4R}\left[e^{-R^2} - 1\right] \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

✓