UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2008/09
28.11.2008

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1:

$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂G. A bezeichne den Flächeninhalt von G.

a) Zeigen Sie: $A = \dfrac{1}{2i} \oint\limits_{\partial G} \bar{z} dz.$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$G_1 = \{z \mid |z-2| < 3\}$$

und von

$$G_2 = \{z \mid |z-3| + |z+3| < 10\}.$$

Aufgabe 2: (Poissonsche Integralformel)

Es sei $f = u+iv$ holomorph in einer Umgebung von $|z| \leq R$ und $F(z) := \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=R} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$

a) Begründen Sie:

Ist $|z| < R$, so gelten: $F(z) = f(z)$ und $F(\dfrac{R^2}{\bar{z}}) = 0.$

b) Begründen Sie mit a) ($|z| < R$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-z}{\mathrm{Re}^{\,it} - z} (u(\mathrm{Re}^{\,it}) - iv(\mathrm{Re}^{\,it}))dt = 0.$$

c) Zeigen Sie ($|z| < R$):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Re}^{\,it} + z}{\mathrm{Re}^{\,it} - z} u(\mathrm{Re}^{\,it})dt + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\mathrm{Re}^{\,it})dt.$$

d) Zeigen Sie, dass für $|z| < |\zeta| = R$

$$\mathrm{Re}\,(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}) = \mathrm{Re}\,\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(\frac{z}{\zeta})^k\} \text{ gilt.}$$

e) Mittels c) und d) bestimme die Fourierreihe von $u(re^{it}), r < R$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Laurentreihe der Funktion

$$f(z) := \frac{-z}{z^2 - 3z + 2}$$

in den folgenden Gebieten:

a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$, c) $|z| > 2$,

d) $|z - 1| > 1$, e) $0 < |z - 2| < 1$.

Aufgabe 4:

a) Für $\frac{1}{2} < |z| < 2$ berechne die Laurentreihe der Funktion

$$f(z) = \frac{-z}{2z^2 - 5z + 2}.$$

b) Mittels a) berechne die Fourierreihe der 2π–periodischen Funktion $g(t) = \dfrac{1}{5 - 4\cos t}$.

Aufgabe 5:

Entwickeln Sie f in ihre Taylorreihe um den jeweiligen Punkt z_0. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 0$,

b) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, $z_0 = 1$,

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$, $z_0 = 0$,

d) $f(z) = \log(1+z)$, $z_0 = 0$, $\log(1) = 0$,

e) $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{1+z}$, $z_0 = 0, \log(1) = 0$.