Aufgabe 1

a) $z(t) = x(t) + iy(t),\ a \le t \le b$ $(z(a) = z(b))$, sei Parametrisierung von ∂G:

$$\frac{1}{2i}\oint_{\partial G} \bar z\, dz = \frac{1}{2i}\int_a^b (x(t) - iy(t))(x'(t) + iy'(t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{\partial G} \binom{x}{y}\cdot d\vec s + \frac{1}{2}\oint_{\partial G}\binom{-y}{x}\cdot d\vec s$$

ebener Gaußscher Integralsatz $\overset{\Downarrow}{=}\ 0 + \frac{1}{2}\iint_G 2\,d(x,y) = A$

b) Rand von G_1: $z(t) = 2 + 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\frac{1}{2i}\oint_{\partial G_1} \bar z\, dz = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(2 + 3e^{-it})\, i3e^{it}\,dt = 9\pi$$

Rand von G_2 ist Ellipse um $(0,0)$ mit den Halbachsen 5 und 4:

$$z(t) = 5\cos t + i4\sin t \quad , 0 \le t \le 2\pi$$

$$\to \frac{1}{2i}\oint_{\partial G_2} \bar z\, dz = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(5\cos t - i4\sin t)(-5\sin t + i4\cos t)\,dt = 20\pi$$

Aufgabe 2

a) Es ist $F(z) = f(z)$ für $|z| < R$ (Cauchy Integralformel)
und für $|z| < R$: $F\left(\frac{R^2}{\bar z}\right) = 0$ (Cauchy Integralsatz)

b) Setze $\xi = Re^{it}$ und $f = u + iv$. Für $|z| < R$ hat man dann mit a):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z}\{u(Re^{it}) + iv(Re^{it})\}\,dt \qquad \underline{(1)}$$

$$0 = \bar 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{-it}}{Re^{-it} - \frac{R^2}{z}}\{u(Re^{it}) - iv(Re^{it})\}\,dt$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z}{z - Re^{it}}\{u(Re^{it}) - iv(Re^{it})\}\,dt \qquad \underline{(2)}$$

c)

(1) - (2):
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\, u(Re^{it})\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{it})\,dt \qquad (3)$$

d)
$$\frac{\xi+z}{\xi-z} = \frac{1+\frac{z}{\xi}}{1-\frac{z}{\xi}} = \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}} + \frac{z}{\xi}\,\frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}$$

$$|z|<|\xi| \qquad \overset{\curvearrowright}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{k+1}$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^k$$

e)
$$\overbrace{u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z=re^{i\varphi}} \overset{c)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(\frac{Re^{it}+re^{i\varphi}}{Re^{it}-re^{i\varphi}}\right) u(Re^{it})\,dt$$

$$\overset{d)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} Re\left(r^k e^{ik\varphi} R^{-k} e^{-ikt}\, u(Re^{it})\right)dt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k r^k \cos k\varphi + b_k r^k \sin k\varphi\right)$$

mit
$$a_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\cos kt\,dt$$

$$k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\sin kt\,dt \qquad (r<R)$$

<u>Aufgabe 3</u> Es ist $f(z) = \frac{-z}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-2}$

a) $|z|<1$: $f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{2^n} z^n$

b) $1<|z|<2$: $f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} z^n$

c) $|z|>2$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{2}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{n+1})z^{-n-1}$

Lösungsskizze 6. Ü HM III WS 08/09

d) $|z-1|>1$: $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{-n}$$

$$= -\frac{1}{z-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^{-n-1}$$

e) $0<|z-2|<1$: $f(z) = \frac{1}{z-2+1} - \frac{2}{z-2} = -\frac{2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$

Aufgabe 4 Es ist $f(z) = \frac{\frac{1}{6}}{z-\frac{1}{2}} - \frac{2/3}{z-2}$

a) für $\frac{1}{2}<|z|<2$ erhält man: $f(z) = \frac{1}{6}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}2^{-n}z^{-n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{n}$$

b) Es ist $f(e^{it}) = \frac{-e^{it}}{2e^{2it}-5e^{it}+2} = \frac{-1}{2e^{it}+2e^{-it}-5} = \frac{1}{5-4\cos t}$

$$= g(t)$$

a) $\rightarrow$ $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}2^{-n}e^{-(n+1)it} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}2^{-n}e^{int}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}2^{-n+1}e^{-int} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}2^{-n}e^{int}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}2^{-n}(e^{int}+e^{-int}) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}2^{-n+1}\cos nt$$

Lösungsskizze Gi.Ü HM III WS 08/09

Aufgabe 5

a) $f(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = +\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{k+1}} z^k, \quad r=2$

b) $f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^k,$

$r=2$, d.h. konvergent für $|z-1|<2$.

c) $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}$

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)z^k$

$r=1$

d) $f(z) = \log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

Wie beim reellen Logarithmus: $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$, $r=1$

e) $f(z) = \frac{1}{1+z}\log(1+z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ Cauchy Produkt

mit $c_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\frac{1}{j}(-1)^{n-j} = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$, $n=1,2,\ldots$

$c_0 = 0$ (liest man oben leicht ab)

$f(z) = z - (1+\frac{1}{2})z^2 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})z^3 - + \ldots, \quad |z|<1.$