UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2008/09
05.12.2008

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1:

a) Für $f(z) = \sin z - \cos z$ sind alle Nullstellen mit den zugehörigen Vielfachheiten zu berechnen.

b) Es sei z_0 die Nullstelle von f, die $|z_0 - 1| < \dfrac{1}{2}$ erfüllt.

c) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurententwicklung um z_0 für die Funktion $g(z) = (f(z))^{-2}$.

Aufgabe 2:

Die Art und Lage sämtlicher Singularitäten sowie die zugehörigen Residuen sind zu berechnen:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z^2 - z - 12}\,, = \frac{1}{(z^2+4)^3}\,, = \frac{\sin(z) - z}{z^3}\,, \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\, e^{\frac{1}{z}},\ = z^n \sin(z)\ (n \in \mathbb{Z}),\ = \frac{1}{\cos(z)}\,, \\ &= \sin(\frac{1}{1-z})\,,\ = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sind $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z - 1 - i}$ und $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Aufgabe 4:

Es sei z_0 ein Pol zweiter Ordnung von f und $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ die Laurententwicklung von f um z_0.

Berechnen Sie $Res(f^2; z_0)$

– bitte wenden –

Aufgabe 5:

Es sei f im Gebiet G holomorph und es gelte $\{z \mid |z - z_0| < r\} \subset G$.

Zeigen Sie: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$

Aufgabe 6:

Es sei f holomorph in $D = \{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.

a) Beweisen Sie: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $p (\in \mathbb{N})$

2. Es gibt eine in $D \cup \{z_0\}$ holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^{-p} g(z)$

3. $\frac{1}{f}$ hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung p und ist in z_0 holomorph.

b) und weiter:

Hat f in z_0 einen Pol, so gilt $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} |f(z)| = \infty$.