Aufgabe 1

a) $f(z) = \sin z - \cos z = 0 \iff \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$$\iff e^{2iz}(1-i) = 1+i \iff e^{2iz} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff \underline{z = z_k = \frac{\pi}{4} + k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Da $f'(z_k) = \cos z_k + \sin z_k = f(z_k) + 2\cos z_k = 2\cos z_k \neq 0$,

sind die z_k einfache Nullstellen von f.

b), c) Nur $z_0 = \frac{\pi}{4}$ genügt der Bedingung $|z_k - 1| < \frac{1}{2}$.

Da f in z_0 eine Nullstelle 1. Ordnung hat, hat $g = \frac{1}{f^2}$

in z_0 einen Pol der Ordnung 2.

Der Hauptteil der Laurententwicklung von g um $z_0 = \frac{\pi}{4}$

hat die Form $H = \frac{a_{-2}}{(z-\frac{\pi}{4})^2} + \frac{a_{-1}}{z - \frac{\pi}{4}}$. gesucht sind

a_{-2} und a_{-1}:

$$\begin{aligned}(f(z))^2 = (\sin(z) - \cos(z))^2 &= 1 - 2\sin(z)\cos(z) \\ &= 1 - \sin(2z) \\ &= 1 - \cos(2z - \tfrac{\pi}{2}) \\ &= 1 - \cos(2(z - \tfrac{\pi}{4}))\end{aligned}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{(2(z-\frac{\pi}{4}))^2}{2!} + \frac{(2(z-\frac{\pi}{4}))^4}{4!} - + \dots\right)$$

$$= 2(z-\tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{2}{3}(z-\tfrac{\pi}{4})^4 + o((z-\tfrac{\pi}{4})^5) \qquad (z \to \tfrac{\pi}{4})$$

$$= 2(z-\tfrac{\pi}{4})^2\Big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{3}(z-\tfrac{\pi}{4})^2 + o((z-\tfrac{\pi}{4})^3)}_{=:q}\Big)$$

$(|q| < 1$, falls $|z - \frac{\pi}{4}|$ hinreichend klein ist$)$

$$\to g(z) = \frac{1}{f(z)^2} = \frac{1}{2(z-\frac{\pi}{4})^2}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \underline{\frac{1}{2(z-\frac{\pi}{4})^2} + \frac{1}{6} + o(z-\tfrac{\pi}{4})}$$

$$\underline{a_{-2} = \tfrac{1}{2},\ a_{-1} = 0}$$

Aufgabe 2

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 12} = \frac{z}{(z-4)(z+3)}, \quad z_1 = 4,\ z_2 = -3 \text{ sind Polstellen 1. Ordnung}$$

$$\operatorname{Res}(f, 4) = \frac{4}{7}, \quad \operatorname{Res}(f, -3) = \frac{3}{7}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^3} = \frac{1}{(z+2i)^3(z-2i)^3}, \quad z_1 = 2i,\ z_2 = -2i \text{ sind Polstellen 3. Ordnung}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_j) = \frac{1}{2!} D^2 \left((z-z_j)^3 f(z)\right)\Big|_{z=z_j} \qquad (j = 1, 2)$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{1}{2} D^2 \frac{1}{(z+2i)^3}\Big|_{z=2i} = -\frac{3i}{512}$$

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \frac{1}{2} D^2 \frac{1}{(z-2i)^3}\Big|_{z=-2i} = \frac{3i}{512}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(\sin(z) - z) = -\frac{1}{z^3}\frac{z^3}{3!} + \frac{1}{z^3}\frac{z^5}{5!} - + \cdots$$

Die Singularität $z = 0$ ist hebbar.

$\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}; \quad z_1 = 1 \text{ ist Pol 2. Ordnung}$$

$z_2 = 0$ ist wesentliche Singularität

$$\operatorname{Res}(f, 1) = D\, e^{\frac{1}{z}}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}}\Big|_{z=1} = -e$$

$$\operatorname{Res}(f, 0): \frac{1}{(1-z)^2} e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\frac{1}{z^l}\right)$$

$$= \left(1 + 2z + 3z^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right)$$

$$= \cdots + \frac{1}{z}\underbrace{\left(1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \cdots\right)} + \cdots$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$$

7. Ü HM III WS 08/09 Lösungsskizzen

$f(z) = z^n \sin(z)$ ist für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ holomorph,

hat für $n = -1$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität

hat für $n < -1$ in $z = 0$ eine Polstelle der Ordnung $-n-1$

$n < -1$ $\operatorname{Res}(f, 0) = ?$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k z^{2k+1+n}$$

$2k+1+n = -1$ für $k = -1 - \frac{n}{2}$

$\rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = 0$ für $n < -1$ und n ungerade

und $\operatorname{Res}(f, 0) = (-1)^{-\frac{n}{2}-1} \frac{1}{(-n-1)!}$ für n gerade

---

$f(z) = \frac{1}{\cos z}$ hat in $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ einfache Polstellen

$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{1}{-\sin z_k} = (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$f(z) = \sin \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (z-1)^{-(2k+1)}$$

$z = 1$ ist wesentliche Singularität

$\operatorname{Res}(f, 1) = -1$

$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ (Vorlesung) $z = 0$ ist keine isolierte Singularität

$\operatorname{Res}(f, 0)$ ist nicht definiert

Aufgabe 3

Gegeben ist die Taylorreihe von $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-1-i}$ um $z_0 = 0$.
Diese Reihe konvergiert in der größten Kreisscheibe mit Entwicklungspunkt = Mittelpunkt, in der keine Singularität liegt.
Die einzige Singularität ist $z = 1+i \rightarrow r = |1+i| = \sqrt{2}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist $f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$

$$\rightarrow f^2(z) = \Big(\sum_{n=-2}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\Big)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \text{ Gesucht ist } a_{-1}.$$

(Cauchy Produkt) $$\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{n} c_{n-\ell-2}(z-z_0)^{n-\ell-2} c_{\ell-2}(z-z_0)^{\ell-2}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{\ell=0}^{n} c_{n-\ell-2} c_{\ell-2}\Big)}_{a_{n-4}} (z-z_0)^{n-4}$$

$$\underline{n=3}: \quad a_{-1} = \operatorname{Res}(f^2, 0) = \sum_{\ell=0}^{3} c_{1-\ell} c_{\ell-2} = \underline{2(c_1 c_{-2} + c_0 c_{-1})}$$

Aufgabe 5

(Cauchy Integralformel) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi$$

$$= (\text{mit } \xi = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})\, ire^{it}}{re^{it}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

Aufgabe 6

1. → 2. $f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \underbrace{h(z)}_{\text{in } z_0 \text{ holomorph}}$

mit $a_{-p} \neq 0$

$\to (z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0) + \dots =: g(z)$

g ist in z_0 holomorph mit $g(z_0) = a_{-p} \neq 0$

2. → 3. Es gilt, das $\frac{1}{g}$ in z_0 holomorph ist. Damit besitzt $\frac{1}{g}(z) = ((z-z_0)^p f(z))^{-1}$ eine Potenzreihenentwicklung bei z_0:

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^p f(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu \quad \text{mit } b_0 = \frac{1}{g}(z_0) \neq 0$$

$$\to \frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^p \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu =: (z-z_0)^p \tilde{h}(z)$$

d.h. z_0 ist für $\frac{1}{f}$ Nullstelle der Ordnung p.

3. → 1. Mit $\tilde{h}$ holomorph in z_0 und $\tilde{h}(z_0) = b_0 \neq 0$ ist $\frac{1}{\tilde{h}(z)}$ in z_0 holomorph, und es gilt $\frac{1}{\tilde{h}(z_0)} \neq 0$.

Also hat man $\frac{1}{\tilde{h}}(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ mit $c_0 \neq 0$

$$\to f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p \tilde{h}(z)} = \frac{c_0}{(z-z_0)^p} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-p} \quad \text{mit } c_0 \neq 0$$

Das ist 1.

Zu 4. f habe in z_0 eine Polstelle. Es ist nachzuweisen, dass dann $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} |f(z)| = \infty$ gilt.

kein Pol (siehe oben):

$$g(z) = (z-z_0)^p f(z) \quad \text{mit } g(z_0) \neq 0 .$$

Setze $M := \left|\frac{g(z_0)}{2}\right| > 0 \longrightarrow |g(z)| \geq M$ in einer Umgebung von z_0. Also: $|f(z)| \geq \frac{M}{|z-z_0|^p}$ in einer Umgebung von z_0. ✓