Aufgabe 1

Wegen $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ gilt für

$$F(z) := \frac{A^2}{A^2 + a^2 - aA(z + \frac{1}{z})} \quad : \quad F(e^{i\varphi}) = f(\varphi).$$

Mit $q := \frac{a}{A}$ (nach Vor.: $0 < q < 1$) rechnet man nach:

$$F(z) = \frac{1}{1 + q^2 - q(z + \frac{1}{z})} = \frac{z}{(1+q^2)z - q(z^2+1)}$$

$$F(z) = \frac{z}{(q-z)(qz-1)}$$

F ist im Kreisring $q < |z| < \frac{1}{q}$ holomorph.

Wegen $0<q<1$ liegt $|z|=1$ in diesem Kreisring.

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$F(z) = \frac{1}{1-q^2}\left(\frac{q}{z-q} + \frac{1}{1-qz}\right) \quad (*)$$

Für $z: q < |z| < \frac{1}{q}$ erhält man (geometrische Reihe!):

$$\frac{q}{z-q} = \frac{q}{z}\frac{1}{1-\frac{q}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{z}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{|n|} z^n$$

$$\frac{1}{1-qz} = \sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k = \sum_{n=0}^{\infty} q^{|n|} z^n$$

Diese beiden Reihen werden in $(*)$ eingesetzt. Dies gibt die Laurentreihe von F für $q<|z|<\frac{1}{q}$:

$$F(z) = \frac{1}{1-q^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{|n|} z^n = \frac{1}{1-q^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k (z^k + z^{-k})\right)$$

$\rightarrow$ Die Fourierreihe von f:

$$(F(e^{i\varphi}) =) f(\varphi) = \underline{\frac{1}{1-q^2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos k\varphi\right]} \text{ mit } q = \frac{a}{A}.$$

Aufgabe 2 (zum Residuensatz)

a) Mit $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2+1}$ ist $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\right)$

$$= 0$$

wegen $\mathrm{Res}(f, \pm i) = \frac{\cos(\pm i)}{\pm 2i} = \pm \frac{\cos i}{2i}$.

b) Mit $f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1}$ ist $\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, 0) = 0$

0 ist innerhalb $|z|=1$ die einzige Singularität. $z=0$ ist wegen $\frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\dots-1}$

$$= \frac{1}{i - \frac{z}{2!} + o(z)} \quad (z \to 0)$$ hebbare

Singularität

c) Für $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$ gilt für $0 < |1-z|$:

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k}$$

man liest ab: $\mathrm{Res}(f,1) = -\frac{1}{e} \rightarrow \oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,1)$

$$= -\frac{2\pi i}{e}$$

d) $\gamma: \; x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{4\pi - 1}}\right)^2 = 1$ Ellipse um 0 mit den Halbachsen 1, $\sqrt{4\pi-1}$.

Singularitäten von $f(z) = \dfrac{z}{\cosh(z) - 1}$ sind die z mit

$$\cosh(z) = 1 \iff \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1$$
$$\iff (e^z - 1)^2 = 0$$
$$\iff z_k = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nur z_0 liegt im Innern von γ. Wegen $\cosh(z_0) = 1$ liegt eine Polstelle 1. Ordnung vor:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\cosh(z) - 1} = \lim_{z \to 0} \frac{2z^2 e^z}{(e^z - 1)^2}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{2z^2\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)}{\left(z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)^2} = 2$$

$$\rightarrow \oint_\gamma \frac{z}{\cosh(z) - 1}\, dz = 4\pi i$$

Aufgabe 3

Wir betrachten $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$. $\operatorname{Re} f|_{\mathbb{R}}$ und $\operatorname{Im} f|_{\mathbb{R}}$

sind die Integranden der zu berechnenden Integrale.
Es ist $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = (z - (1+i))(z - (1-i))$
$z_0 = 1+i$ liegt innerhalb $\Gamma = \{x \mid -R \le x \le R\} \cup \{Re^{it}, 0 \le t \le \pi\}$
$(R > \sqrt{2})$. z_0 ist Polstelle 1. Ordnung.

Nach dem Residuensatz gilt $\underline{\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+i)}$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{i(1+i)}}{2(1+i)-2} = \underline{\pi e^{i-1}} \qquad \underline{(1)}$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx + \int_\gamma f(z)\,dz \quad \text{mit } \gamma: z(t) = Re^{it},\ 0 \le t \le \pi \qquad \underline{(2)}$$

Wir zeigen: $\underline{\lim\limits_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = 0}$.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \pi R \max\{|f(z)|, z \in \gamma\} \qquad \underline{(3)}$$

$$|z^2-2z+2| \ge \left||z|^2 - 2|z-1|\right| \underset{\substack{z=Re^{it}\\ R\text{ genügend groß}}}{=} R^2 - 2|Re^{it}-1|$$

$$\ge R^2 - 2R - 2 \underset{R\text{ genügend groß}}{\ge} \frac{1}{2}R^2$$

$$|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)} \le 1, \text{ da } \operatorname{Im}(z) \ge 0 \text{ für } z = Re^{it}, 0 \le t \le \pi.$$

Insgesamt: $\quad |f(z)|_{z\in\gamma} \le \dfrac{2}{R^2}$

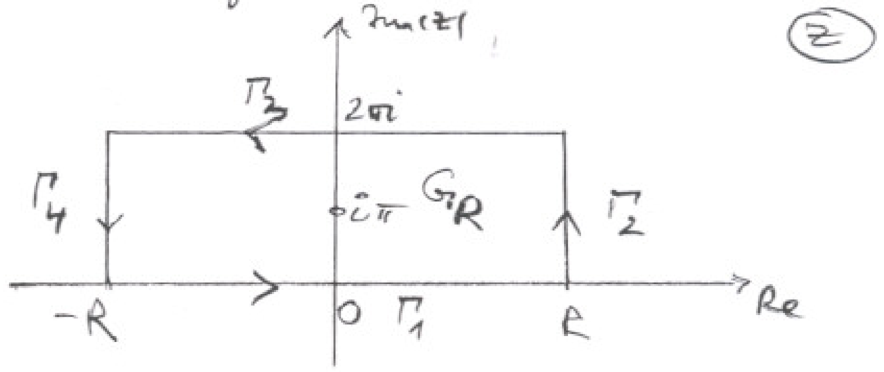
Mit $\underline{(3)}$ folgt: $\quad \underline{\left|\int_\gamma f(z)\,dx\right| \le \pi R \frac{2}{R^2} \to 0 \quad (R\to\infty)}$

Bilde in $\underline{(1)}, \underline{(2)}$ $R\to\infty$: $\pi e^{i-1} = \dfrac{\pi}{e}(\cos 1 + i \sin 1) \underset{\uparrow}{=} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx$

Das Integral existiert!

$$\to \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\cos 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\sin 1}$$

Aufgabe 4



Betrachte $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ auf G_R bzw $\partial G_R = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 =: \Gamma$

$z_0 = i\pi$ ist die einzige Singularität von f in G_R. z_0 ist Polstelle 1. Ordnung. $\operatorname{Res}(f, i\pi) = -e^{ai\pi}$

Residuensatz $\longrightarrow$: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i\, e^{ai\pi}$ $\quad$ (1)

Es gelten: $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz = 0$ $\quad$ (2)

Denn: $\Gamma_2 : z(t) = R + it \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\rightarrow |f(z)|_{z\in\Gamma_2} = \left|\dfrac{e^{a(R+it)}}{1+e^R e^{it}}\right| \le \dfrac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \ (R\to\infty)$, wegen $a<1$.

$\rightarrow \left|\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \le 2\pi \dfrac{e^{aR}}{e^R - 1} \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)$

$\Gamma_4 : z(t) = -R + it \quad t: 2\pi \to 0$

$|f(z)|_{z\in\Gamma_4} \underset{\triangle}{\le} \dfrac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \longrightarrow 0 \ (R\to\infty)$ wegen $a > 0$

ganz ähnlich wie vorher

$\rightarrow \left|\displaystyle\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz\right| \le 2\pi \dfrac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \rightarrow 0 \quad (R\to\infty)$.

---

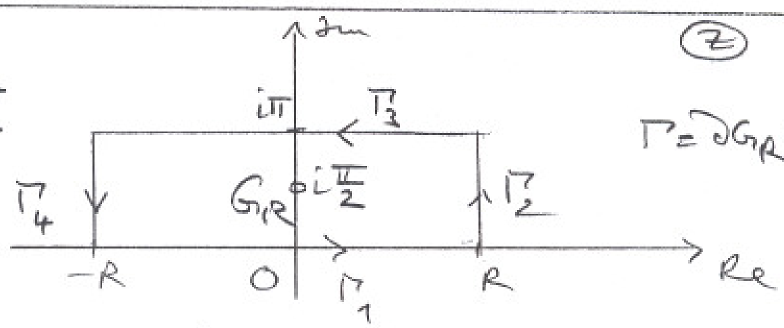
(1), (2) $\longrightarrow$ $\quad -2\pi i\, e^{ai\pi} = \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx}_{\text{von } \Gamma_1} \underbrace{- \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} e^{a2\pi i}}{1+e^x e^{2\pi i}}\,dx}_{\text{von } \Gamma_3}$

also: $$-2\pi i e^{ai\pi} = \left(1-e^{a2\pi i}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass das Integral links existiert.

Aufgabe 5



$\Gamma = \partial G_R = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$

$$f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{\cosh(z)}$$ $(\omega \in \mathbb{R})$ hat nur in $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ in G_R eine Polstelle 1. Ordnung.

$$\left(\cosh(z) = 0 \Leftrightarrow e^{z} = -e^{-z} \Leftrightarrow z_k = i\frac{\pi}{2} + i\,k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(f, i\tfrac{\pi}{2}\right) \underset{\text{Satz 4, S.20}}{=} \frac{e^{-\omega\frac{\pi}{2}}}{\sinh\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = -i e^{-\omega\frac{\pi}{2}}$$

Res-Satz

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-i e^{-\omega\frac{\pi}{2}}\right) = 2\pi e^{-\omega\frac{\pi}{2}} \qquad (1)$$

$$= \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}\right) f(z)\,dz$$

Wir zeigen: $$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0 \qquad (2)$$

Γ_2: $z(t) = R + it$, $0 \le t \le \pi$.

$$\cosh(R+it) = \cosh(R)\cos(t) + i\sinh(R)\sin(t) \rightarrow |\cosh(R+it)| \ge |\sinh(R)|$$

$$\max_{\Gamma_2} |e^{i\omega z}|_1 = \max_{0\le t\le\pi} |e^{i\omega(R+it)}| =: M$$ ($\omega \in \mathbb{R} \to M$ ist von R unabhängig)

$$\to \quad \left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi M}{\sinh(R)} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Analog weist man nach: $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz\right| = 0$ (3)

$$\left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}\right) f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{\cosh(x)}\,dx - \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}\,dx$$

$$= (1+e^{-\omega\pi}) \int_{-R}^{+R} \frac{e^{i\omega x}}{\cosh(x)}\,dx \qquad (4)$$

Bildet man in (1) $R\to\infty$, so erhält man mit (2), (3), (4):

$$2\pi e^{-\omega\frac{\pi}{2}} = (1+e^{-\omega\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\cosh(x)}\,dx$$

$$\to \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\cosh(x)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\cosh(\omega\frac{\pi}{2})}$$