Aufgabe 2

a) $y_1(x) = 1 + 2\sin(x)$, $y_2(x) = 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x)$

$y_3(x) = 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x) + \frac{1}{3}\sin^3(x)$

$y_4(x) = y_3(x) + \frac{1}{12}\sin^4(x) = 1 + 2\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x) + \frac{1}{2\cdot 3}\sin^3(x) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\sin^4(x)\right)$

b) Vermutung gemäß a):

$$y_n(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\sin^j(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

Beweis mit Induktion

Ind Anfang: $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ✓ (siehe oben)

Ind schluss: $n \to n+1$: Es gelte $(*)$ für ein $n \geq 4$ (Ind vor)

Es ist nachzuweisen: $y_{n+1}(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!}\sin^j(x)$ (Ind beh)

Mit der Iterationsvorschrift und mit der Ind vor $(*)$ gilt:

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\sin^j(t)\right)\cos t \, dt$$

$$= 1 + 2\left(\sin(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)!}\sin^{j+1}(x)\right)$$

$$= 1 + 2\left(\sin(x) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!}\sin^j(x)\right) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!}\sin^j(x) \quad ✓$$

Die durch $(*)$ gegebene Funktionenfolge ist für alle x gleichmäßig konvergent, da $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}|\sin^j(x)|$ die (von x unabhängige) konvergente Majorante $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}$ besitzt. Nach Vorlesung ist

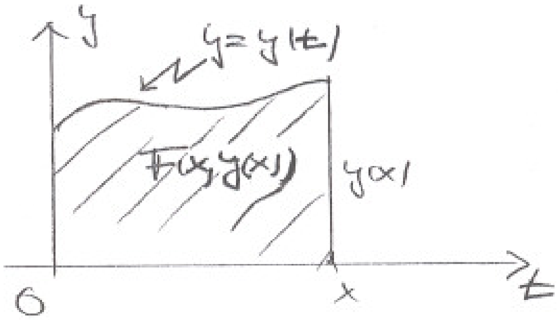
$$y(x) := 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\sin^j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ Lösung des AWP.}$$

Das soll hier überprüft werden: Wir können $y(x)$ direkt angeben:

$$\underline{y(x)} = 1 + 2\left(e^{\sin(x)} - 1\right) = \underline{2e^{\sin(x)} - 1}$$

Einsetzen in die DGL und die Anfangsbedingung zeigt, dass dies die gesuchte Lösung ist.

Aufgabe 3



gesucht ist $y = y(x)$ mit

$$F(x,y(x)) = \int_0^x y(t)\,dt$$

$\rightarrow$ DGL für y: $\underline{D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))\,y'(x) = y(x)}$ $\quad (*)$

a) $F(x,y) = \frac{y^3}{2x}$: $(*)$ wird zu: $-y^3 + 3y^2 x y' = 2x^2 y \quad (x \neq 0)$

$|:x^3$: $\quad -\frac{y^3}{x^3} + 3\frac{y^2}{x^2}y' = 2\frac{y}{x}$

Substituiere: $y \rightarrow u := \frac{y}{x}$: $-u^3 + 3u^2(xu' + u) = 2u$

$u = 0$ (d.h. $y = 0$) ist Lösung.

Es sei $u \neq 0 \rightarrow \quad -u^2 + \frac{3}{2}\,2uu'x + 3u^2 = 2$

Setze $v := u^2 \rightarrow \quad \frac{3}{2}xv' + 2v = 2$

$x \neq 0 \rightarrow \quad v' + \frac{4}{3}\frac{1}{x}v = \frac{4}{3}\frac{1}{x}$ lineare inhomogene DGL für v

$$\rightarrow \quad v(x) = u^2(x) = \underline{\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 = 1 + Cx^{-\frac{4}{3}}, \ C \text{ konst.}}$$

$\rightarrow$ implizite Darstellung der Lösungen: $\underline{y^2(x) = x^2 + Cx^{\frac{2}{3}}}$, C konst. beliebig!

9. Übung HMIII WS 08/09 Lösungsskizzen

b) $F(x,y) = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$. $\overline{(\ast)}$ wird hier zu

$$-xy' + y = y^3$$

(oder löse systematisch mit HM I)

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x}{y}\right)' y^2 = y^3$$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{x}{y}\right)' = y$$

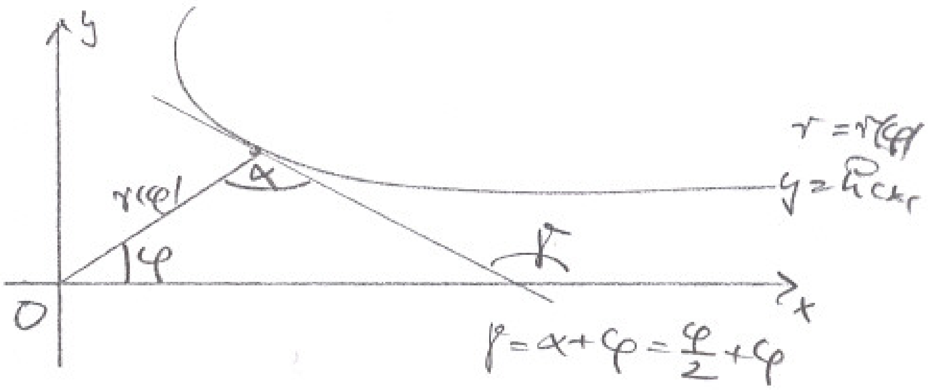
Mit $u(x) = \frac{x}{y(x)}$: $\quad u'(x) = \frac{x}{u(x)} \longrightarrow u^2(x) = \frac{x^2}{y^2(x)} = x^2 + C$

$$\longrightarrow \quad y(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+C}}$$

(C konst., etwa $C > 0$).
$x > 0$ oder $x < 0$

Aufgabe 4

$\alpha = \frac{\varphi}{2}$ ist die Bedingung an die gesuchte Kurve.



Polarkoordinaten in der (x,y)-Ebene: (r,φ):

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi), \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$

Die gesuchte Kurve $y = h(x)$ wird in der Form $r = r(\varphi)$ bestimmt: $\quad h(x(\varphi)) = y(\varphi)$

$$\longrightarrow \quad y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi = h'(x(\varphi))\,x'(\varphi)$$
$$= \tan\left(\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)\left(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\right)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\tan(\varphi) + \tan(\frac{\varphi}{2})}{1 - \tan(\varphi)\tan(\frac{\varphi}{2})} = \frac{r'\sin(\varphi) + r(\varphi)\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi} = \frac{r'\tan\varphi + r(\varphi)}{r' - r\tan\varphi}$$

$\rightarrow \quad r'(\varphi) = r(\varphi) \cot \frac{\varphi}{2} \quad \rightarrow \quad \ln(r(\varphi)) + C = 2 \ln \sin(\frac{\varphi}{2})$

Setze $C = -\ln 2a$ $(a>0$ konst$)$

$\rightarrow \quad \underline{r(\varphi)} = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \underline{a(1-\cos\varphi)}$ $(a>0$ konst$)$

Aufgabe 5

a) $x = x(y)$ bezeichnet die Umkehrfunktion von $y = y(x)$
Es ist dann in der DGL $y'(x)$ durch $\frac{1}{x'(y)}$ zu ersetzen.
Die DGL für $x = x(y)$ lautet somit:

$$x'(y) = 2x(y) + e^{y} \quad \text{(linear, inhomogen)} \quad |\cdot e^{-2y}$$

$$(x^{-2y} x(y))' = e^{-y}$$

$$\rightarrow \quad \underline{x(y) = -e^{y} + c_1 e^{2y}} \quad (c_1 \text{ konst})$$

Die Lösung durch $(0,1)$: $\quad 0 = -e + c_1 e^{2} \rightarrow c_1 = \frac{1}{e}$

$$\rightarrow \quad \underline{y = h(x) = \ln\left(\frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} + ex}\right)} \quad (x > -\frac{e}{4})$$

Die Lösung durch $(-1,2)$: $-1 = -e^{2} + c_1 e^{4} \rightarrow c_1 = \frac{e^2-1}{e^4}$

$$\rightarrow \quad \underline{x(y) = -e^{y} + \frac{e^2-1}{e^4} e^{2y}} \quad (y \in \mathbb{R})$$

---

b) $\quad u = \frac{y'}{y}, \quad u' = \frac{y''}{y} - u^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = u' + u^2$

y genüge der vorgelegten DGL. o.B.d.A $y \neq 0$; $|\cdot y^{-2}$

$$\rightarrow \quad \frac{y''}{y} + e^{2x}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{y'}{y}\cos x = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad u'(x) + u(x)\cos(x) + u^2(1+e^{2x}) = 0 \qquad |\cdot e^{\sin x}$$

$$(u(x)e^{\sin x})' = -u^2 e^{2\sin x}(1+e^{2x})e^{-\sin x}$$

$$-((u(x)e^{\sin(x)})^{-1})' = -(1+e^{2x})e^{-\sin x}$$

$$u(x)e^{\sin(x)} = \frac{1}{\int^x (1+e^{2t})e^{-\sin t}\,dt} = \frac{y'}{y}e^{\sin(x)} = (\ln y(x))'e^{1+\sin(x)}$$

$$\rightarrow \quad \underline{y(x) = C\exp\left(\int^x u(t)\,dt\right), \quad C \text{ konst}}$$

c) $t = \frac{x}{x+2}$, $x = \frac{2t}{1-t}$, $x(x+2) = \frac{4t}{(1-t)^2}$

$y(x) \longleftrightarrow u(t)$ $\quad$ (1) $\underline{u(t) := y\left(\frac{2t}{1-t}\right)}$, $y(x) = u\left(\frac{x}{x+2}\right)$

mit der Kettenregel folgt aus (1): $u'(t) = \frac{2}{(1-t)^2}y'\left(\frac{2t}{1-t}\right) \rightarrow \underline{y'\left(\frac{2t}{1-t}\right) = \frac{(1-t)^2}{2}u'(t)}$ (2)

und $u''(t) = \ldots \overset{(2)}{\Rightarrow} \underline{y''\left(\frac{2t}{1-t}\right) = \frac{(1-t)^4}{4}u''(t) - \frac{(1-t)^3}{2}u'(t)}$ (3)

$y = y(x)$ sei Lösung der vorgelegten DGL. Ersetze dort x durch $\frac{2t}{1-t}$ und verwende (1), (2), (3). Es ergibt sich für u die DGL

$$\underline{t^2u''(t) + 2tu'(t) - 2u(t) = 0} \qquad (4)$$

Für $t > 0$ gibt der Ansatz $u(t) = t^r$:

$$r(r-1) + 2r - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = 1,\ r_2 = -2$$

Lösungen von (4) (für $t>0$): $u_1(t) = t$, $u_2 = t^{-2}$.
(Wie geht man für $t<0$ vor?)

$\rightarrow$ für $x>0$: $y_1(x) = u_1\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{x}{x+2}$

$$y_2(x) = u_2\left(\frac{x}{x+2}\right) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2$$

---

d) $t = g(x) \Longleftrightarrow x = h(t)$

$y(h(t)) =: \varphi(t)$, $\varphi(g(x)) = y(x)$.

Mit der Kettenregel erhält man:

$$y'(h(t)) = \frac{\varphi'(t)}{h'(t)}, \quad y''(h(t)) = \frac{\varphi''(t)}{h'(t)^2} - \frac{\varphi'(t)\, h''(t)}{h'(t)^3}$$

Ersetze in $x^4 y''(x) + 2x^3 y'(x) + n^2 y(x) = 0$ x durch $h(t)$.
Man erhält als DGL für $\varphi(t)$:

(T) $$h^4(t)\left(\frac{\varphi''(t)}{h'(t)^2} - \frac{\varphi'(t)\, h''(t)}{(h'(t))^3}\right) + 2h^3(t)\frac{\varphi'(t)}{h'(t)} + n^2\varphi(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad \dots + \varphi'(t)\left[2\frac{h^3(t)}{h'(t)} - h^4(t)\frac{h''(t)}{h'(t)^3}\right] + \dots = 0$$

h soll so gewählt werden, dass $[\dots] = 0$ wird. Das bedeutet: $2h'(t)^2 = h''(t)\, h(t)$

$$\rightarrow h(t) = -\frac{1}{t} = x, \quad t = g(x) = -\frac{1}{x}$$

Hiermit wird (T) zu: $\varphi''(t) + n^2\varphi(t) = 0$ mit den Lösungen $\varphi_1(t) = \sin nt$, $\varphi_2(t) = \cos nt$. Man erhält als Lösungen der Ausgangsdgl:

$$y_1(x) = \varphi_1\left(-\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{n}{x}, \quad y_2(x) = \varphi_2\left(-\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{n}{x}.$$