Lösungshinweise 10. Übung HM III WS08/09

Aufgabe 1

a) $y=(y')^2\sin y'$, $y(0)=\frac{\pi^2}{72}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$

Lösung in Parameterform $x=\varphi(t), y=\chi(t)$ mit

$$\left.\begin{array}{l}\chi(t)=t^2\sin t, \quad \dot\chi(t)=t\,\dot\varphi(t)\\ \text{und } \chi(t_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2, \ \varphi(t_0)=0\end{array}\right\}\ (*)$$

$$\chi(t_0)=t_0^2\sin t_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \to t_0=\frac{\pi}{6}$$

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\dot\chi(\tau)}{\tau}\,d\tau=\int_{t_0}^{t}(2\sin\tau+\tau\cos\tau)\,d\tau=t\sin t-\cos t+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}$$

b) $x=(y')^3+y'$, $y(2)=\frac{9}{4}$

Lösung:

$x=\varphi(t), y=\chi(t)$, $\varphi(t_0)=2, \chi(t_0)=\frac{9}{4}$

$\varphi(t)=t^3+t \to t_0=1$. Gleichung für $\chi(t)$:

$$\dot\chi(t)=t\,\dot\varphi(t)=3t^3+t \to \chi(t)=\frac{9}{4}+\int_{1}^{t}(3\tau^3+\tau)\,d\tau$$

$$\chi(t)=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+1$$

c) $y=\sin(y')-y'\cos(y')$, $y(0)=1$

Lösung: $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)=\sin(t)-t\cos(t)$

mit $\varphi(t_0)=0$, $\chi(t_0)=1 \to t_0=\frac{\pi}{2}$. Aus $\dot\varphi(t)=\frac{1}{t}\dot\chi(t)$ folgt

$$\varphi(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\left(\frac{\cos\tau}{\tau}-\frac{\cos\tau}{\tau}+\sin\tau\right)d\tau=-\cos(t)$$

Aufgabe 2

a) $y = xy' + \sqrt{4+(y')^2}$

1) Geraden als Lösung: $y = cx + \sqrt{4+c^2}$, $c \in \mathbb{R}$

2) Lösungen, die keine Geraden sind; in Parameterform
$x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, die sich aus
$$\chi(t) = t\varphi(t) + \sqrt{4+t^2}$$
$$\dot\chi(t) = t\dot\varphi(t)$$ berechnen.

$\rightarrow$ $\underline{x = \varphi(t) = -\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}}$, $\underline{y = \chi(t} = \frac{-t^2}{\sqrt{4+t^2}} + \sqrt{4+t^2} = \underline{\frac{4}{\sqrt{4+t^2}}}$

(t eliminieren: $\frac{x}{y} = -\frac{t}{4} \Rightarrow t = -4\frac{x}{y} \rightarrow \underline{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}$)

b) $y = xy' \pm \sqrt{1+(y')^2}$

1) Geraden als Lösung: $y = cx \pm \sqrt{1+c^2}$, $c \in \mathbb{R}$

2) Lösungen $\neq$ Geraden. $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$

$\underline{x = \varphi(t) = \mp\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$, $\underline{y = \chi(t)} = \mp\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \pm \sqrt{1+t^2} = \underline{\pm\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$

Hier kann t leicht eliminiert werden: $\underline{x^2 + y^2 = 1}$

c) $yy' = x - (y')^2$

1) Die Geraden $\underline{y = x-1 \text{ und } y = -x+1}$ sind Lösungen.

2) Lösungen, die keine Geraden sind: $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ mit
$t\chi(t) = \varphi(t) - t^2$ und $\dot\chi(t) = t\dot\varphi(t)$

$$\to \quad \dot{\chi} + \frac{t}{t^2-1}\chi + \frac{2t^2}{t^2-1} = 0 \quad \text{(linear, inhomogen)} \;\Big|\cdot\sqrt{t^2-1}$$

$$\to \left(\chi(t)\sqrt{t^2-1}\right)^{\cdot} = -2\frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\to \underline{y = \chi(t) = -t - \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\operatorname{arcosh}|t| + \frac{c}{\sqrt{t^2-1}}} \quad (|t|>1)$$

c konst

$$\underline{x = \psi(t) = t\chi(t) + t^2 = -\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\operatorname{arcosh}(t) + \frac{ct}{\sqrt{t^2-1}}}$$

Aufgabe 3

a) $(y'')^2 + xy'' - y' = 0$

Setze $u = y' \to \quad u = xu' + (u')^2$ (siehe 2a, b)

1) Geraden als Lösung: $u = xc + c^2$ ($c \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\to \quad \underline{y = \tfrac{1}{2}x^2 c + xc^2 + c_1} \quad (c, c_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

2) Lösungen ($\neq$ Geraden) in Parameterform:
$x = \psi(t)$, $u = \chi(t)$ berechnen sich aus:

$$\chi(t) = t\psi(t) + t^2, \quad \dot{\chi} = t\dot{\psi} \to \quad x = \psi(t) = -2t$$
$$u = \chi(t) = -t^2$$

$$\to \quad u = -\frac{x^2}{4} \quad \to \quad \underline{y(x) = -\frac{x^3}{12} + c_2}$$

b) $yy'' - 2(y')^2 + 2y' = 0$ (Typ: $F(y, y', y'') = 0$, ohne x!)

Vorgehen:

1) Bestimme $p = p(t)$ aus $t\,p(t)\dot{p}(t) - 2p(t)^2 + 2p(t) = 0$

2) Berechne y aus $y' = p(y)$.

$\alpha)$ $p(t) = 0 \longrightarrow y(x) = \text{const}$ ✓

$\beta)$ $p(t) \neq 0$: $t\dot{p}(t) - 2p(t) + 2 = 0$ (linear, inhomogen)

$\rightarrow p(t) = Ct^2 + 1$ (C konst)

$\rightarrow y' = C_y^2 + 1$

$$\rightarrow x + C_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan(\sqrt{C}\,y) & , C > 0 \\ y & , C = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{|C|}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{|C|}\,y}{1-\sqrt{|C|}\,y}\right| & , C < 0 \end{cases} \quad C_1 \text{ konst}$$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Kurve Γ_{c_0}: $\varphi(x, y, c_0) = 0$ und die Kurve

E in Parameterdarstellung $x = \xi(c)$, $y = \eta(c)$ $(c \in J)$

durch
$$\begin{aligned} \varphi(\xi(c), \eta(c), c) &= 0 \\ D_3\varphi(\xi(c), \eta(c), c) &= 0 \end{aligned} \qquad (c \in J).$$

Wir nehmen an, E ist C^1 und regulär: $\xi'(c)^2 + \eta'(c)^2 \neq 0$.

Der Punkt $x_0 = \xi(c_0)$, $y_0 = \eta(c_0)$ liegt auf Γ_{c_0} und E.

a) Es ist zu zeigen, dass Γ_{c_0} und E in (x_0, y_0) dieselbe Steigung haben.

– Γ_{c_0} habe in (x_0, y_0) die explizite Darstellung
$$y = f(x, c_0)$$
Es gelten also: $\varphi(x, f(x, c_0), c_0) = 0$ und
$D_2\varphi(x, y, c_0) \neq 0$ bei (x_0, y_0) $\quad (*)$

Lösungshinweise 10. Übung HM III WS 08/09

Es ist $D_1 f(x_0, c_0)$ die Steigung von Γ_{c_0} in (x_0, y_0).
Aus $\varphi(x, f(x, c_0), c_0) = 0$ folgt durch Differentiation nach x (beachte $\overline{(*)}$): $D_1\varphi(x, f(x,c_0), c_0) + D_2\varphi(x, f(x,c_0), c_0)\, D_1 f(x, c_0) = 0$

$$\text{für } x = x_0 \Longrightarrow \quad D_1 f(x_0, c_0) = -\frac{D_1\varphi(x_0, y_0, c_0)}{D_2\varphi(x_0, y_0, c_0)} \qquad \underline{(1)}$$

— Zu $\underline{E}$: Bei c_0 gelten $\underline{(2)}$ $\varphi(\xi(c), \eta(c), c) = 0$

$\underline{(3)}$ $D_3\varphi(\xi(c), \eta(c), c) = 0$

mit $\xi'^2(c) + \eta'^2(c) \neq 0$ $\underline{(4)}$

Differenziere $\underline{(2)}$ nach c, verwende $\underline{(3)}$ und setze $c = c_0$:

$$D_1\varphi(x_0, y_0, c_0)\,\xi'(c_0) + D_2\varphi(x_0, y_0, c_0)\,\eta'(c_0) = 0$$

Wegen $\underline{(4)}$ und $\overline{(*)}$ ist $\xi'(c_0) \neq 0 \rightarrow \xi'(c) \neq 0$ bei c_0
$\rightarrow$ $x = \xi(c)$ kann bei c_0 nach c aufgelöst werden: $c = g(x)$, $c_0 = g(x_0)$ $\rightarrow$

$y = \eta(g(x)) =: v(x)$ ist explizite Darstellung von E bei x_0

Aus $\underline{(2)}$ folgt: $\varphi(x, v(x), g(x)) = 0$
$\rightarrow$ (mit $\underline{(3)}$) $D_1\varphi(x_0, y_0, c_0) + D_2\varphi(x_0, y_0, c_0)\, v'(x_0) = 0$

$$\rightarrow \quad v'(x_0) = -\frac{D_1\varphi(x_0, y_0, c_0)}{D_2\varphi(x_0, y_0, c_0)} \overset{(1)}{=} D_1 f(x_0, c_0)$$

✓

b) $\varphi(x, y, c) = 0$ in expliziter Form $y = f(x, c)$ sei Lösung:

$$\underline{(5)} \quad F(x, f(x,c), D_1 f(x,c)) = 0 \qquad \forall x, c$$

Lösungshinweise 10. Übung HM III WS 08/09

Es ist nachzuweisen, dass für die Einhüllende $y = v(x)$ gilt: $\quad F(x, v(x), v'(x)) = 0 \quad \forall x$.

Es sei $(x_0, y_0) \in E$ beliebig, fest. Es gilt dann mit einem c_0: $\quad y_0 = v(x_0) = f(x_0, c_0)$. Nach a) gilt $v'(x_0) = \partial_1 f(x_0, c_0)$.

(5) für $x = x_0$, $c = c_0$ gibt: $0 = F(x_0, y_0, \partial_1 f(x_0, c_0)) = F(x_0, v(x_0), v'(x_0))$ ✓

c) $$\varphi(x, y, c) = y - cx - g(c) = 0$$
$$\to \partial_3 \varphi(x, y, c) = -x - g'(c) = 0$$

$$\to x = \xi(c) = -g'(c)$$
$$\to y = \eta(c) = -c g'(c) + g(c).$$

$$\left(y = v(x) = x (g')^{-1}(-x) + g((g')^{-1}(-x)) \right)$$