Aufgabe 1

a) Die DGL ist exakt. Eine Potentialfunktion ist

$$\varphi(x,y) = x^4y^3 - x^2y$$

Die Lösungen sind implizit durch $x^4y^3 - x^2y = c$, c konst, beliebig gegeben.

b) Die Gleichung ist nicht exakt. Die Gleichung für den integrierenden Faktor $\mu = \mu(x,y)$ lautet mit $f(x,y) = x^2+y^2+x$ und $g(x,y) = xy$:

$$(D_2\mu)\frac{f}{g} - D_1\mu = -\frac{1}{x}\mu \qquad (*)$$

Wähle $\mu = \mu(x)$. $(*)$ wird zu $\mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x)$

$\rightarrow \mu(x) = x$.

Die DGL wird zu

$$(x^3+xy^2+x^2)dx + x^2y\,dy = 0$$

Diese DGL hat $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ als Potential. (Die) Lösungen der Ausgangsgleichung sind dann implizit durch $\varphi(x,y) = c$ (c konst, beliebig) gegeben.

(Bemerkung: Oben muss $x=0$ ausgeschlossen werden. $x(y)=0$ $\forall y$ ist Lösung der DGL. Diese Lösung ist für $c=0$ in $\varphi(x,y)=c$ nicht enthalten.)

c) Die Gleichung $y - (k(\sqrt{x^2+y^2})^3 + x)y' = 0$ wird zunächst auf Polarkoordinaten transformiert:

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$: $y = y(x)$ wird zu

$$r\sin(\varphi) = y(r\cos\varphi)$$

Lösungsskizzen 11. Ü HM IV WS 08/09

Differentiation nach φ liefert: $y'(x) \to \dfrac{r'\sin(\varphi)+r\cos(\varphi)}{r'\cos(\varphi)-r\sin(\varphi)}$

und die DGL für $r=r(\varphi)$ lautet

$$1+k\,r^2\cos(\varphi)+(k\,r\sin(\varphi))\,r'(\varphi)=0$$

oder $(1+kr^2\cos(\varphi))\,d\varphi+kr\sin(\varphi)\,dr=0 \qquad (*)$

Diese DGL ist nicht exakt. Man findet leicht einen integr. Faktor $\mu=\mu(r,\varphi)$, der nur von φ abhängt: $\mu(\varphi)=\sin(\varphi)$

Die dann exakte DGL ist $(*)\cdot\sin(\varphi)$:

$$(\sin(\varphi)+kr^2\cos(\varphi)\sin(\varphi))\,d\varphi+kr\sin^2(\varphi)\,dr=0$$

Man findet das Potential $V(r,\varphi)=\frac{1}{2}kr^2\sin^2(\varphi)-\cos(\varphi)$

und implizit Lösungen

$$\underline{\tfrac{1}{2}kr^2\sin^2(\varphi)-\cos(\varphi)=C} \quad (\text{konst, beliebig})$$

oder in kartesischen Koordinaten: $\underline{\dfrac{k}{2}y^2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=C}$

Hier ist die Lösung $y=0$ <u>nicht</u> mit enthalten.

Aufgabe 2

a) Die Bedingung, dass $\lambda(x\cdot y)\,y+\lambda(x\cdot y)\,x(1-3x^2y^2)\,y'=0$ exakt sei, liefert für $\lambda=\lambda(t)$ die DGL:

$$\lambda'(t)=-\frac{3}{t}\lambda(t) \;\to\; \lambda(t)=\frac{1}{t^3}$$

$\to \mu(x,y)=\dfrac{1}{(xy)^3}$ ist integr. Faktor.

Die nun exakte DGL lautet: $\dfrac{1\,dx}{x^3y^2}+\left(\dfrac{1}{x^2y^3}-\dfrac{3}{y}\right)dy=0$

mit dem Potential $\varphi(x,y)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2y^2}-3\ln|y|$

Die Lösungen werden dann implizit mit einer beliebigen Konstante C durch $\underline{6x^2y^2\ln|y| + Cx^2y^2 + 1 = 0}$ $(y \neq 0)$ gegeben. Die Lösung $y=0$ ist hier <u>nicht</u> mit enthalten: sie ist oben "verloren gegangen"!

b) Der Versuch, einen integrierenden Faktor der Form $\lambda(x+y)$ zu finden, führt auf die Gleichung für $\lambda = \lambda(t)$:

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{t}\lambda(t)$$ mit der Lösung

$\lambda(t) = \frac{1}{t}$ also $\mu(x,y) = \frac{1}{x+y}$. Die hiermit exakte

DGL $\left(2+\frac{1}{x+y}\right)dy + \left(1+\frac{1}{x+y}\right)dx = 0$ hat das Potential $\varphi(x,y) = x+2y+\ln|x+y|$, und man hat

in $\underline{x+2y+\ln|x+y| = C \text{ (C konst, beliebig) Lösungen in impliziter Form}}$ erhalten. Die Lösung $\underline{y=-x}$ fehlt hier.

c) Hier führt der Ansatz $\mu(x,y) = \lambda(x^2+y^2)$ auf die folgende Gleichung für $\lambda = \lambda(t)$: $\lambda'(t) = -\frac{2}{t}\lambda(t)$ mit der Lösung $\lambda(t) = \frac{1}{t^2}$ und also $\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$. Die hiermit

exakte DGL: $\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}+1\right)dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy = 0$ hat

das Potential $\varphi(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2} + x$ und wir

haben die Lösungen in impliziter Form:

$$\underline{2(x-C)(x^2+y^2) = 1}, \quad C \text{ konst, beliebig}$$

Aufgabe 3

Schreibt man (1) $\partial_2(\mu_1 f) = \partial_1(\mu_1 g)$ (μ_1 ist integr. Faktor)

(2) $\partial_2(\mu_2 f) = \partial_1(\mu_2 g)$ (μ_2 " " ")

ausführlich auf und bildet (1)$\cdot\mu_2$ − (2)$\cdot\mu_1$, so erhält man

$$\underbrace{(\mu_2 \partial_1 \mu_1 - \mu_1 \partial_1 \mu_2)}_{=:A} g = \underbrace{(\mu_2 \partial_2 \mu_1 - \mu_1 \partial_2 \mu_2)}_{=:B} f \quad (3)$$

Setze $\lambda(x,y) := \frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}$. Es sei $y = y(x)$ eine Lösung,

die implizit durch $\lambda(x,y) = c$ (konst) gegeben ist, also:

$$\Lambda(x) := \lambda(x, y(x)) = c.$$

$$\rightarrow 0 = \Lambda'(x)\, \mu_2^2(x, y(x)) = A + By' = B\left(\frac{f}{g} + y'\right)$$

$$\rightarrow \underline{f + gy' = 0} \checkmark$$

Problem: Wozu die Vor. $\det \begin{pmatrix} \partial_1\mu_1 & \partial_2\mu_1 \\ \partial_1\mu_2 & \partial_2\mu_2 \end{pmatrix}_{(x,y)} \neq 0$?

Aufgabe 4: Es sei $f = u + iv$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ holomorph. Dann gelten die Cauchy-Riemannschen Dgln in G:

$$\partial_1 u = \partial_2 v \ (1) \text{ und } \partial_2 u = -\partial_1 v \ (2)$$

Die Dgl $u\,dx + v\,dy = 0$ ist in G exakt, falls

$$\partial_2 u = \partial_1 v \ (3) \text{ in } G.$$

Lösungsskizze 11. Ü HM III WS 08/09

(2), (3) $\to D_2 u(x,y) = 0 \to u = u(x)$

(2) $\to D_1 v = 0 \to v = v(y)$

(1) $\to u'(x) = v'(y) \quad \forall x,y$

$\to u'(x) = C = v'(y)$ $(C \in \mathbb{R}$ konst$)$

$\to u(x) = Cx + C_1$ $(C_1 \in \mathbb{R}$ konst$)$

$v(y) = Cy + C_2$ $(C_2 \in \mathbb{R}$ konst$)$

$\to f(x+iy) = C(x+iy) + C_1 + C_2 i$

oder $\underline{f(z) = Cz + D}$ mit $C \in \mathbb{R}$ konst

$D \in \mathbb{C}$ konst.