[illegible] Lösungshinweise

Aufgabe 1: Die Dgl wird untersucht für $0 < x < 1$.

1) Setze die Funktion $y_1(x) = x^{\alpha}$ in die homogene Dgl ein. Es ergibt sich:

$$(\alpha+2)(\alpha+1) - x(\alpha+2)(\alpha-1) = 0$$

$$\rightarrow \quad y_1(x) = x^{-2}$$ ist Lösung der homogenen Dgl.

2) Zur Lösung von $x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 6x$ wird der Ansatz $y(x) = u(x)\,y_1(x)$ gemacht.
Es ergibt sich

$$u'' + \frac{2}{1-x}u' = \frac{6x}{1-x}$$

Das ist eine lineare inhomogene Dgl 1. Ordnung für u'.
Man erhält $u'(x) = 6x - 3 + A(x-1)^2$

$$\rightarrow u(x) = 3x^2 - 3x + B + \frac{A}{3}(x-1)^3$$

$$\rightarrow \quad \underline{y(x) = 3 - \frac{3}{x} + \frac{B}{x^2} + A\,\frac{1}{3}\,\frac{(x-1)^3}{x^2}}$$

mit beliebigen Konst A, B.

Aufgabe 2

$$u' = xu - v + 1 \quad (1)$$
$$v' = (x^2+2)u - xv \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow \underbrace{\overbrace{v = xu - u' + 1}^{(3)},\; v' = xu' + u - u''}$$

Setze in (2) ein: $u'' + u = x \rightarrow \underline{u(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + x}$

$$(3) \rightarrow \underline{v = (c_1 x - c_2)\cos(x) + (c_2 x + c_1)\sin(x) + x^2}$$

c_1, c_2 konst. [illegible]

Aufgabe 3

$$u(x) = \sqrt{x}\, y\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x>0) \qquad \underline{(1)}$$

$$\rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, y\left(\frac{x^2}{2}\right) + x^{3/2}\, y'\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{(Kettenregel)} \quad \underline{(2)}$$

$$\rightarrow \quad u''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}\, y\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\sqrt{x}\, y'\left(\frac{x^2}{2}\right) + x^{5/2}\, y''\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad \underline{(3)}$$

Die Vor, dass y Lösung der gegebenen Dgl ist, besagt auch:

$$\frac{x^4}{4} y''\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{4} y'\left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{16}\right) y\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Verwendet man hier $\underline{(1)}$, $\underline{(2)}$, $\underline{(3)}$, so erhält man:

$$\underline{(T)} \qquad \underline{u''(x) + x^2 u(x) = 0}$$

Lösen mittels einer Potenzreihe: Ansatz

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad \text{Einsetzen in die Dgl ergibt:}$$

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$0 = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-2}\right) x^n$$

Koeffizientenvgl: $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ und

$$\underline{a_{n+2} = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots} \qquad \underline{(R)}$$

1) Wählt man $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, so erhält man aus $\underline{(R)}$

$$\underline{(*)} \quad a_{4k} = (-1)^k \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{4m(4m-1)} \quad , k \geq 1 \quad , \text{ und also}$$

$$\underline{u_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{4m(4m-1)} \right) x^{4k}}$$

2) Setze $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. $\underline{(R)}$ liefert in diesem Fall

$$\underline{(**)} \quad a_{4k+1} = (-1)^k \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{(4m+1)\,4m}, \quad k \geq 1, \text{ und somit}$$

$$u_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{(4m+1)\,4m} \right) x^{4k+1}$$

u_1, u_2 sind ein Fundamentalsystem für $\underline{(T)}$.
$\mathrm{Lin}(u_1, u_2)$ sind dann alle Lösungen von $\underline{(T)}$.

Beweis von $\underline{(*)}$ und $\underline{(**)}$ mit vollständiger Induktion in Verbindung mit $\underline{(R)}$

12. Ü HM III WS 08/09 Lösungshinweise

Aufgabe 4

Die DGl $x^2y''+y=0$ wird wegen der Randbedingung für $x>0$ behandelt. Der Ansatz: $y(x)=x^r$ liefert

$r_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ und damit die komplexe Lösung $\tilde{y}(x)=\sqrt{x}\,e^{i\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln x}$. $\operatorname{Re}\tilde{y}$ und $\operatorname{Im}\tilde{y}$ sind

zwei l. u. Lösungen der DGl, so dass man die allgemeine reellwertige Lösung erhält:

$$y(x)=c_1\sqrt{x}\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln x\right)+c_2\sqrt{x}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln x\right),\ x>0$$

$c_1, c_2\in\mathbb{R}$ konst.

$\rightarrow\ y(1)=0=c_1 \rightarrow y(x)=c_2\sqrt{x}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln x\right)$

Es sind die Zahlen $b>1$ gesucht, für die $y(b)=0$ wird für beliebige c_2.

$\rightarrow\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\ln b=k\pi\quad, k=1,2,\ldots$

$$\rightarrow\quad b=\exp\left(\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right),\ k=1,2,\ldots$$

Aufgabe 5

Die Vor. für w besagt ausführlich:
Für beliebiges $s\geq x_0$, $s\in I$, gelten

(1) $(D_1^2w)(x,s)+p(x)(D_1w)(x,s)+q(x)w(x,s)=0$ für $x\in I, x\geq s$

und (2) $w(s,s)=0$ und $(D_1w)(s,s)=f(s)$ (3)

und $w(\cdot,s) \in C^2(I \cap \{x \geq s\})$.

Für $u(x) := \int_{x_0}^{x} w(x,s)\,ds$, $x \in I, x \geq s\ (\geq x_0)$ folgen:

$$\underline{u(x_0) = 0}, \quad u'(x) = \underbrace{w(x,x)}_{\substack{=0 \\ \text{nach } \underline{(2)}}} + \int_{x_0}^{x} D_1 w(x,s)\,ds$$

$\rightarrow$ $\underline{u'(x_0) = 0}$

$$u''(x) = \underbrace{D_1 w(x,x)}_{= f(x) \text{ nach } \underline{(3)}} + \int_{x_0}^{x} D_1^2 w(x,s)\,ds$$

$$\rightarrow \quad \underline{Lu(x) = f(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} (Lw)(x,s)\,ds}_{=0 \text{ nach } \underline{(1)}}, \quad x \geq x_0$$

Also ist u Lösung des Problems

$$\left| \begin{array}{l} (Ly)(x) = f(x), \quad x \geq x_0 \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

.