Aufgabe 1 Mit $\cos(x) = -\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2k+1}$

wird die DGL zu

$$(1) \qquad y'' + \underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}(x-\tfrac{\pi}{2})^{2k+1}\Big)}\, y = 0,\quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0,\quad y'(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

Ansatz zur Lösung

$$(2) \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\tfrac{\pi}{2})^n \quad \text{mit} \quad a_0 = 0,\ a_1 = -1$$

Setze $x-\frac{\pi}{2} = t$ und (2) in (1) ein. Verwende

$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$$

und mit

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & n = 2l \\ (-1)^l \frac{1}{(2l+1)!} & n = 2l+1 \end{cases} \qquad l = 0,1,\ldots \qquad (3)$$

$$\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n t^n\Big)}_{\text{Cauchy Produkt}} \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\beta_k\Big)t^n.$$

Man erhält:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\beta_k\Big]t^n = 0$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleich (d.h. hier: $[\ldots] = 0$) die Rekursionsformel für die a_n:

$$(R) \quad \begin{cases} a_{n+2} = -\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\beta_k, & n = 0,1,\ldots \\ \text{mit} \quad a_0 = 0,\ a_1 = -1 \end{cases}$$

arbeiten wir die spezielle Gestalt (3) der β_k ein, so erhalten wir:

Lösungshinweise zur 13. Übung HMTI WS 08/09

für gerade n: $n=2\ell$

$$(R)_g \quad a_{2\ell+2} = -\frac{1}{(2\ell+2)(2\ell+1)} \sum_{m=0}^{\ell-1} a_{2\ell-2m-1} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} \quad , \ell = 1,2,\dots$$

für ungerade n: $n = 2\ell+1$

$$(R)_u \quad a_{2\ell+3} = -\frac{1}{(2\ell+3)(2\ell+2)} \sum_{m=0}^{\ell} a_{2(\ell-m)} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} \quad , \ell = 0,1,\dots$$

Man berechnet:

$$y(x) = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{180}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6 - \frac{1}{12\cdot 42}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7 + \dots$$

$$\left(a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{12},\ a_5 = 0,\ a_6 = -\frac{1}{180},\ a_7 = -\frac{1}{12\cdot 42} \right)$$

Aufgabe 2

a) Mit dem Ansatz $y(x) = a + bx + cx^2$ für die Lösung der homogenen Gleichung erhält man die zwei l.u. Lösungen $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2 - 1$.

Mittels Variation der Konstanten für $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 2$

$$y_p(x) = c_1(x)\,x + c_2(x)\,(x^2-1)$$

mit $c_1'(x)x + c_2'(x)(x^2-1) = 0$, $c_1'(x) + c_2'(x)2x = 2$

findet man $c_2(x) = \ln(x^2+1)$ und $c_1(x) = -2x + 4\arctan(x)$

und also die allgemeine Lösung:

$$y(x) = (A - 2x + 4\arctan(x))\,x + (B + \ln(1+x^2))(x^2-1)$$

mit beliebigen Konstanten A, B.

b) Man sieht leicht, dass $u(x) = x$ Lösung ist.
Der Ansatz $y(x) = x\,v(x)$ liefert für v die Gleichung:

$$v''(x) + \underbrace{\left(\frac{-x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)} + \frac{2}{x} \right)}_{-\frac{(x\sin(x)+\cos(x))'}{x\sin(x)+\cos(x)} + \frac{2}{x}} v'(x) = 0$$

$\to$ integrierender Faktor $= \dfrac{x^2}{x\sin(x)+\cos(x)}$

$$\left(v'(x) \frac{x^2}{x\sin(x)+\cos(x)} \right)' = 0$$

$$\to \quad v'(x) = -A\, \frac{x\sin(x)+\cos(x)}{x^2}$$

$$\to \quad v(x) = A\, \frac{\cos(x)}{x} + B$$

$\to$ Die allgemeine Lösung: $y(x) \left(= x\,v(x)\right) = A\cos(x) + Bx$

mit beliebigen Konstanten A, B.

c) Eine Lösung ist $u(x) = \sin(x)$. Der Ansatz
$z(x) = v(x)\sin(x)$ liefert für v die Gleichung

$$v''(x) + v'(x) \left(2\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = 0$$

mit dem integrierenden Faktor $\cos(x)\sin^2(x)$

$$\to \quad \left(v'(x) \cos(x) \sin^2(x) \right)' = 0$$

$$v'(x) = A \frac{1}{\cos(x)\sin^2(x)} = A\,\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + A\,\frac{1}{\cos(x)}$$

$$v(x) = -A\frac{1}{\sin(x)} + A\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + B$$

→ allgemeine Lösung:

$$y(x) = A\sin(x)\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin(x)}\right] + B\sin(x)$$

mit beliebigen Konstanten A und B.

Aufgabe 3 $\quad y'' + e^x y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 1$

Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{nx}$ einsetzen: $y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{nx}$

$$e^x y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} e^{nx}$$

$$\to \quad 0 = y'' + e^x y = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-1}) e^{nx}$$

→ Rekursionsformel: $n^2 a_n + a_{n-1} = 0$, $\quad a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-1}, \; n = 1, 2, \ldots$

mit $a_0 = \lim_{x\to-\infty} y(x) = 1$

→ (mit Induktion) $\quad a_n = (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\to \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nx} = 1 - \frac{e^x}{(1!)^2} + \frac{e^{2x}}{(2!)^2} - \frac{e^{3x}}{(3!)^2} \pm \cdots \qquad (*)$$

Konvergenz: Wegen $\left|\frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nx}\right| \le \frac{(e^x)^n}{n!}$ hat die oben bestimmte Reihe für jedes x die für jedes x konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!}$ $\left(= e^{e^x}\right)$. $(*)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent / gleichmäßig konvergent auf jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall.

Lösungshinweise 13. Übung HM III WS 08/09

Aufgabe 4 u, v als linear unabhängige Lösungen von $y'' + q(x)y = 0$ sind auf jeden Fall nicht die Nullfunktionen.

a) Angenommen x_0 ist zweifache Nullstelle von u, d.h. $u(x_0) = u'(x_0) = 0$. Aus Satz 1 / S. 30 folgt: $u = 0$. Widerspruch ✓

b) $x_1 < x_2$, $u(x_1) = u(x_2) = 0$.

Annahme: $v(x) \neq 0$ für $x_1 \le x \le x_2$.

Betrachte $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. f ist in $[x_1, x_2]$ stetig diff'bar.

Es gilt $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Nach dem MWS gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$$

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{v^2(x)} W(u,v)(x)$, $x \in [x_1, x_2]$.

Da u, v Lösungen von $y'' + q(x)y = 0$ und l. u. sind, gilt für alle x $W(u,v)(x) \neq 0 \rightarrow f'(x) \neq 0 \;\forall x$ (Siehe S. 33)

Widerspruch zu $f'(\xi) = 0$ ✓

Aufgabe 5: a) Der Ansatz $y(x) = z(x)u(x)$ für

$$Ly = y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 \quad \text{mit } L(u) = 0$$

liefert als Bedingung für z:

$$L(zu) = zL(u) + z'''u + z''(3u' + a_1(x)u) + z'(a_2(x)u + a_1(x)2u' + 3u'')$$
$$= u\{z''' + z''\underbrace{\left(a_1(x) + 3\frac{u'}{u}\right)}_{=: b_2(x)} + z'\underbrace{\left(a_2(x) + 2a_1(x)\frac{u'}{u} + 3\frac{u''}{u}\right)}_{=: b_1(x)}\}$$

also die Gleichung 2. Ordnung für z':

$$z''' + b_2(x) z'' + b_1(x) z' = 0$$

Da nach Vor. die Lösung $z = \frac{v}{u}$ bekannt ist, kann man hiermit die allgemeine Lösung von $Ly = 0$ berechnen (25.4 Abschnitt 4.)

b) $Ly = y''' + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{a_1(x)} y'' \underbrace{- \frac{2}{x^4}}_{a_2(x)} y' + \underbrace{\frac{2}{x^5}}_{a_3(x)} y = 0$

$u = x$, $v = x^2$ sind Lösungen (l.u.).

Hier hat man $b_2 = a_1 + 3\frac{u'}{u} = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}$, $b_1 = -\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^3}\frac{1}{x} = 0$

und erhält für z die Gleichung:

$$z''' + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}\right) z'' = 0$$

Mit $w = z''$: $\quad w' + w\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}\right) = 0$

mit dem integrierenden Faktor $m(x) = e^{-\frac{1}{2x^2}} x^3$

folgt: $\quad \left(w e^{-\frac{1}{2x^2}} x^3\right)' = 0$

$\rightarrow w(x) = z''(x) = \frac{c_1}{x^3} e^{\frac{1}{2x^2}} \rightarrow z'(x) = -c_1 e^{\frac{1}{2x^2}} + c_2$

$\rightarrow z(x) = -c_1 \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2t^2}} dt + c_2 x + c_3$

$\rightarrow y(x) = c_1 x \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2t^2}} dt + c_2 x^2 + c_3 x$, c_1, c_2, c_3 beliebige Konstanten