Aufgabe 1

geht man mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in die Dgl ein, so ergibt sich:

$$2a_2 + (6a_3 + 4a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(3-n)a_{n-1}]x^n = 0$$

$$\to \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2}{3}a_0, \quad \underline{a_{n+2} = \frac{2(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \text{(R)}}$$

a_0, a_1 sind frei wählbar.
Mit $a_0 = 1, a_1 = 0$ und $a_0 = 0, a_1 = 1$ erhält man zwei lin. Lösungen y_1, y_2.

<u>Zu y_1</u>:

$$a_1 = 0 \xRightarrow{(R)} a_{1+3k} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$
$$a_2 = 0 \xRightarrow{(R)} a_{2+3k} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Man findet mit (R) $\quad y_1(x) = 1 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{45}x^6 - \frac{2}{405}x^9 - \dots$

analog für

<u>y_2</u>:

$$a_0 = 0 \to a_{3k} = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$
$$a_2 = 0 \to a_{2+3k} = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

Man findet $\quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{63}x^7 - \frac{1}{567}x^{10} - \dots$

<u>Zur Konvergenz</u>

<u>y_1</u>: setze $t = x^3$: $y_1(x) \to \tilde{y}_1(t) = 1 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{45}t^2 - \dots$

$$=: \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

mit $c_n = a_{3n} \quad \to \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(3n-2)}{(3n+3)(3n+2)} \to \infty \quad (n \to \infty)$

$\Rightarrow$ $r=\infty$. Die Reihe konvergiert für $|x^3|<\infty$, also für $|x|<\infty$

analog für y_2:

$$y_2(x) = x\underbrace{\left(1-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{63}x^6-\dots\right)}_{1-\frac{1}{6}t-\frac{1}{63}t^2-\dots=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k}$$

mit $c_k = a_{1+3k} \rightarrow \frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{a_{3k+4}}{a_{3k+1}} = \frac{2(3k-1)}{(3k+4)(3k+3)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

y_2 konvergiert absolut für $|x|<\infty$.

Aufgabe 2

a) Differenziere die DGl k mal:

$$y^{(k+2)}(x) = 2xy^{(k+1)}(x) + 2(k+2)y^{(k)}(x) \quad , k=0,1,\dots$$

Das kann man sich z.B. mittels Induktion klarmachen.

$$\rightarrow \quad y^{(k+2)}(0) = 2(k+2)\,y^{(k)}(0) \quad , k=0,1,2,\dots \qquad \underline{(R)}$$

Aus $y(0)=0 \quad \rightarrow \quad y^{(2\ell)}(0) = 0 \quad , \ell=0,1,2,\dots$

$\underline{(R)} \quad \rightarrow \quad y^{(2\ell+3)}(0) = 2(2\ell+3)\,y^{(2\ell+1)}(0), \quad \ell=0,1,2,\dots$

Mit $y'(0)=1$ findet man (vermuten und Induktion)

$$y^{(2\ell+1)}(0) = \frac{(2\ell+1)!}{\ell!} \qquad (\ell=0,1,2,\dots)$$

b)

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)!}\,y^{(2\ell+1)}(0)\,x^{2\ell+1} = x\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}(x^2)^{\ell} = \underline{x e^{x^2}}$$

Mache mit y die Probe.

Aufgabe 3 a) Der Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho}$ wird in die DGL eingesetzt. Man erhält:

$$\rho(3\rho-1)a_0 x^0 + (\rho+1)(3\rho+2)a_1 x + (\rho+2)(3\rho+5)a_2 x^2$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+\rho)(3n+3\rho-1)a_n + a_{n-3} \right] x^n = 0$$

Es ist $a_0 \neq 0$ beliebig; wir wählen $\underline{a_0 = 1}$. Dann muss sein:

$\underline{\rho_1 = 0 \text{ oder } \rho_2 = \frac{1}{3}}$.

Weiter folgen $\underline{a_1 = a_2 = 0 \text{ und } (n+\rho)(3n+3\rho-1)a_n + a_{n-3} = 0,\ n \geq 3}$

Für $\rho_1 = 0$ hat man $a_n = -\dfrac{a_{n-3}}{n(3n-1)}$, $n \geq 3$

$$\rightarrow y_1(x) = 1 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{2448}x^6 - + \cdots, \quad |x| < \infty.$$

Für $\rho_2 = \frac{1}{3}$ lautet die Rekursionsformel: $a_n = -\dfrac{a_{n-3}}{n(3n+1)}$, $n \geq 3$

$$\rightarrow y_2(x) = \sqrt[3]{|x|}\left(1 - \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{3420}x^6 - + \cdots\right), \quad 0 < |x| < \infty.$$

14. Ü HM III WS 08/09 Lösungshinweise

Aufgabe 3b)

Der Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho}$ ergibt

$$a_0 \rho^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(n+\rho)^2 - a_{n-1}] x^n = 0$$

$\to$ $a \neq 0$ beliebig: $a_0 = 1$, $\rho_{1/2} = 0$ und

$$(R) \quad \underline{a_n(n+\rho)^2 - a_{n-1} = 0 \, , \; n = 1, 2 \ldots} \, .$$

$\underline{\rho = 0}$ $\quad \to \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} \, , \; n = 1, 2 \ldots \, , \; a_0 = 1$

$$\to \quad a_n = \frac{1}{(n!)^2} \, , \; n = 0, 1, \ldots$$

und also

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^n \, , \; |x| < \infty .$$

Eine zweite von y_1 l.u. Lösung kann man so erhalten (Vorlesungszusammenfassung: II, 2. b) S.37, 38):

Setze $y(x,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho) x^{n+\rho}$ in die DGl ein

$$x y'' + y' - y = \rho^2 a_0 x^{\rho-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left((n+\rho)^2 a_n - a_{n-1}\right)}_{=0} x^{n+\rho-1}$$

$\underline{(R)}$

$$\to a_n = a_n(\rho) \quad (\rho \neq -n) \quad n = 1, 2 \ldots$$

Mit $a_0 = 1$ liegt somit $y = y(x,\rho)$ fest.

Für $\partial_\rho y(x,\rho)$ gilt $\left((\cdot)' = \text{Ableitung nach } x \right)$

$$x\left(\partial_\rho y(x,\rho)\right)'' + \left(\partial_\rho y(x,\rho)\right)' - \partial_\rho y(x,\rho) = 2\rho x^{\rho-1} + \rho^2 \ln|x|\, x^{\rho-1}$$

$\Rightarrow$ $y_2(x) := \partial_\rho y(x,\rho)|_{\rho=0}$ ist Lösung der vorliegenden DGL

Aus (R) folgt: $a_n = \dfrac{1\,(=a_0)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (j+\rho)^2}$, $n=1,2\ldots$

$$\rightarrow \partial_\rho y = \partial_\rho \left[x^\rho \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (j+\rho)^2} x^n \right)\right]$$

$$= (\ln|x|)\, x^\rho \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (j+\rho)^2} \right)$$

$$+ x^\rho \left[\!\left[\underbrace{-\frac{2}{(\rho+1)^2}}_{=:b_1} x \underbrace{-2\left(\frac{1}{(\rho+1)^3(\rho+2)^2} + \frac{1}{(\rho+1)^2(\rho+2)^3}\right)}_{=:b_2} x^2 - \ldots \right]\!\right]$$

$$\overset{\rho=0}{\Rightarrow} \quad y_2(x) = (\ln|x|)\, y_1(x) + \left\{ x^\rho \left[\!\left[\ldots \right]\!\right] \right\}\Big|_{\rho=0}$$

$$= (\ln|x|)\, y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Wir berechnen die b_n: Es gilt $b_n = a_n'(0)$ $\left(a_n = a_n(\rho)\right.$, $\left. a_n'(\rho) = \partial_\rho a_n \right)$
(Wegen $a_0 = 1 \rightarrow b_0 = 0$.)

Hier bedeutet $(\cdot)'$ die Ableitung nach ρ!

Aus (R) $(n+\rho)^2 a_n - a_{n-1} = 0$ folgt

$$2(n+\rho)\, a_n(\rho) + (n+\rho)^2 a_n'(\rho) - a_{n-1}'(\rho) = 0 \qquad n=1,2\ldots$$

$$\begin{cases} (n+\rho)^2 a_n'(\rho) = a_{n-1}'(\rho) - 2(n+\rho)a_n(\rho) \\ (n+\rho)^2 a_n(\rho) = a_{n-1}(\rho) \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}}}_{} = \frac{1}{(n+\rho)^2}$$

$$\longrightarrow \underline{\frac{a_n'}{a_n}} = \frac{a_{n-1}'}{a_{n-1}} - 2(n+\rho)\frac{a_n}{a_{n-1}} \overset{\Downarrow}{=} \underline{\frac{a_{n-1}'}{a_{n-1}} - \frac{2}{n+\rho} \qquad n \geq 1}$$

Setze $\rho = 0$: $\quad \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{2}{n}$, $n \geq 1$ mit $\frac{b_0}{a_0} = 0$.

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) = \underline{-\sum_{n=1}^{k}\frac{2}{n}} = \frac{b_k}{a_k} - \frac{b_0}{a_0} = \underline{\frac{b_k}{a_k}}$$

$$\longrightarrow \underline{b_k = -2a_k\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)} = \underline{-\frac{2}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)}$$

$k = 1, 2, \dots$

Aufgabe 4

Nach Aufgabenstellung hat jede Lösung der gesuchten Dgl die Form $\quad y(x) = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$

Bilde hiermit $\quad y'$ und y''.

Eliminiere aus $\quad y(x) = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$

und $\quad y'(x) = 2xc_1 e^{x^2} - 2xc_2 e^{-x^2}$

c_1, c_2 und setze in den Ausdruck für y'' ein:

$$\underline{xy'' = y' + 4x^3 y}$$