Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2010/2011
04.11.2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3. Übungsblatt

Aufgabe 10

Berechnen Sie die allgemeine Lösung (in impliziter Form) der Differentialgleichung

$$(\frac{1}{x^2} + 2y^2)\,dx + yx\,dy = 0$$

a) durch Bestimmung eines integrierenden Faktors $\mu = \mu(x)$,

b) durch Umformen in eine Bernoullische Differentialgleichung.

Aufgabe 11

Begründen Sie, dass die Differentialgleichung

$$2xy^4e^y + 2xy^3 + y + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)y' = 0$$

nicht exakt ist. Bestimmen Sie dann einen integrierenden Faktor, der nur von einer der beiden Veränderlichen abhängt, und lösen Sie die Differentialgleichung.

Aufgabe 12

Lösen Sie jeweils die Differentialgleichung, indem Sie einen integrierenden Faktor der angegebenen Form bestimmen.

a) $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dx + y\,dy = 0\,, \qquad \mu(x,y) = \rho(x^2 + y^2)\,;$

b) $xy + x^2y' + \tan(xy) = 0\,, \qquad \mu(x,y) = \rho(xy)\,.$

Aufgabe 13

Gegeben sei die folgende implizite Differentialgleichung

$$y = \frac{1}{2}x^2 - xy' + (y')^2.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen dieser Differentialgleichung.

b) Für welche Werte x_0, y_0 gibt es eine Lösung y, die $y(x_0) = y_0$ erfüllt?

c) Für welche Werte x_0, y_0 gibt es *genau* eine solche Lösung?

— bitte wenden —

Aufgabe 14

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x = \ln^2(y') + y', \qquad y(1) = y_0$$

in Parameterform.

Aufgabe 15

Ein Fußball wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vom Erdboden aus senkrecht in die Höhe geschossen. Bezeichnet $r(t)$ seinen Abstand zum Erdmittelpunkt zur Zeit t, dann wird seine Bewegung durch

$$r'' = -\frac{\gamma M}{r^2}, \qquad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0$$

beschrieben, wobei γ die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und R der Erdradius ist. Wie muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden, damit der Ball nicht wieder zur Erde zurückfällt? Berechnen Sie für das kleinste derartige v_0 die Lösung $r(t)$.