Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 10 **a)** Die Gleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ mit $P(x,y)=\frac{1}{x^2}+2y^2$ und $Q(x,y)=yx$. Gesucht ist ein nur von x abhängender integrierender Faktor $\mu=\mu(x)$. Für einen solchen gilt $\mu_y=0$ und $\mu_x=\mu'$. Aus der Bedingung $(\mu P)_y=(\mu Q)_x$, also $P\mu_y-Q\mu_x=\mu(Q_x-P_y)$, ergibt sich

$$-yx\mu'(x)=\mu(x)(y-4y)=\mu(x)(-3y),$$

was für $y\neq 0$ ($y(x)=0$ ist offenbar keine Lösung der Differentialgleichung) auf

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{3}{x}$$

führt. Diese homogene lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung $\mu(x)=Cx^3$, $C\in\mathbb{R}$. Wir wählen $C=1$ und erhalten $\mu(x)=x^3$ als integrierenden Faktor. Somit ist die Gleichung

$$(x+2x^3y^2)\,dx+yx^4\,dy=0$$

exakt. Wir bestimmen nun eine Funktion F mit $F_x(x,y)=x+2x^3y^2$ und $F_y(x,y)=yx^4$. Die erste Bedingung liefert

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4y^2+c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c. Also erhält man

$$F_y(x,y)=yx^4+c'(y)\overset{!}{=}yx^4$$

und damit $c'(y)=0$. Dies ist etwa für $c\equiv 0$ erfüllt, so dass $F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4y^2$ ist. Darum ist die allgemeine Lösung in impliziter Form gegeben durch $F(x,y(x))=\text{const}$, also $x^2+x^4y(x)^2=\text{const}$.

b) Die Differentialgleichung $(\frac{1}{x^2}+2y^2)dx+yxdy=0$ kann man auch in der Form $(\frac{1}{x^2}+2y^2)+yxy'=0$ schreiben. Da $y(x)=0$ keine Lösung ist, kann man durch y dividieren und erhält für $x\neq 0$ die Gleichung $y'+\frac{2}{x}y+\frac{1}{x^3}\frac{1}{y}=0$. Dies ist eine Bernoulli-Differentialgleichung mit Exponent $\alpha=-1$. Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}=2y$ und die Standardsubstitution $z=y^{1-\alpha}=y^2$, $z'=2yy'$ ergibt

$$z'+\frac{4}{x}z+\frac{2}{x^3}=0.$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist $z(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{C}{x^4}$ mit $C\in\mathbb{R}$. Für die Lösung y unserer ursprünglichen Gleichung bedeutet dies

$$x^4y(x)^2+x^2=C.$$

Aufgabe 11 Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, wobei

$$P(x,y) := 2xy^4e^y + 2xy^3 + y\,, \qquad Q(x,y) := x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\,.$$

Offenbar sind $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Differentialgleichung ist nicht exakt, denn es gilt

$$\begin{aligned} P_y(x,y) - Q_x(x,y) &= \big(2x(4y^3e^y + y^4e^y) + 6xy^2 + 1\big) - \big(2xy^4e^y - 2xy^2 - 3\big) \\ &= 8xy^3e^y + 8xy^2 + 4 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Allerdings ist

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{4}{y}$$

nur von y abhängig, so dass es einen integrierenden Faktor, der nur von y abhängt, geben muss. Für $\mu = \mu(y)$ soll $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$\mu P_y + \mu' P = \mu Q_x\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \mu' = -\frac{P_y - Q_x}{P}\mu = -\frac{4}{y}\mu\,.$$

Eine Lösung hiervon ist

$$\mu(y) = \exp\left(\int -\frac{4}{y}\,dy\right) = e^{-4\ln|y|} = \frac{1}{y^4}\,.$$

Für $y \neq 0$ haben wir damit einen integrierenden Faktor gefunden. Offenbar ist $y(x) = 0$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung; die anderen finden wir, indem wir mit $\mu(y) = y^{-4}$ multiplizieren und die sich ergebende exakte Differentialgleichung

$$(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})\,dx + (x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4})\,dy = 0$$

lösen. Für eine zugehörige Stammfunktion F soll $F_x(x,y) = 2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3}$ gelten, daher ist

$$F(x,y) = x^2e^y + x^2y^{-1} + xy^{-3} + c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c, und damit ergibt sich

$$F_y(x,y) = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4} + c'(y) \stackrel{!}{=} x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4}\,.$$

Wir wählen $c(y) = 0$. Alle Lösungen (außer $y(x) = 0$) sind implizit gegeben durch

$$F(x,y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Aufgabe 12 Damit $\mu(x,y)$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ ist, muss gelten:

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x\,, \qquad \text{also} \qquad \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x\,.$$

Wir müssen daher μ jeweils so bestimmen, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mu[P_y - Q_x] = \mu_x Q - \mu_y P\,. \tag{$*$}$$

a) Diese Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ mit

$$P(x,y) := x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\,, \qquad Q(x,y) := y\,.$$

Für $\mu(x,y) = \rho(x^2+y^2)$ gilt $\mu_x(x,y) = 2x\rho'(x^2+y^2)$ und $\mu_y(x,y) = 2y\rho'(x^2+y^2)$. Gleichung ($*$) wird daher zu

$$\rho(x^2+y^2)\big[(4x^2y + 4y^3) - 0\big] = 2x\rho'(x^2+y^2)y - 2y\rho'(x^2+y^2)(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,.$$

Zusammengefasst haben wir

$$4y(x^2+y^2)\rho(x^2+y^2) = -2y(x^4+2x^2y^2+y^4)\rho'(x^2+y^2)\,.$$

Da $y(x)=0$ offenbar keine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist, dividieren wir durch y und setzen $t := x^2+y^2$. Dies führt wegen $x^4+2x^2y^2+y^4 = t^2$ auf

$$4t\rho(t) = -2t^2\rho'(t)\,, \qquad \text{also} \qquad \rho'(t) = -\frac{2}{t}\,\rho(t)\,.$$

Eine Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung für ρ ist $\rho(t) = \exp\bigl(\int -2/t\,dt\bigr) = e^{-2\ln t} = t^{-2}$. Damit wissen wir:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

ist für $x^2+y^2 \neq 0$ ein integrierender Faktor. Wir betrachten daher die exakte Differentialgleichung, die sich aus der ursprünglichen Gleichung durch Multiplikation mit $\mu(x,y)$ ergibt, also

$$\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}+1\right)dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 0\,,$$

und bestimmen eine zugehörige Stammfunktion F. Aus $F_y(x,y) = y/(x^2+y^2)^2$ folgt

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2} + c(x)$$

mit einer gewissen Funktion c. Also erhalten wir

$$F_x(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + c'(x) \stackrel{!}{=} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + 1\,.$$

Damit $c'(x) = 1$ gilt, wählen wir $c(x) = x$. Mit $F(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1} + x$ erhält man die allgemeine implizite Lösung $F(x,y) = A$, und Multiplikation mit -2 liefert

$$\frac{1}{x^2+y^2} - 2x = C \qquad (C\in\mathbb{R})\,.$$

b) Hier gilt $P(x,y) = xy + \tan(xy)$ und $Q(x,y) = x^2$. Mit dem gegebenen Ansatz für μ hat man $\mu_x(x,y) = y\rho'(xy)$ und $\mu_y(x,y) = x\rho'(xy)$.
Die Bedingung $(*)$ liefert in diesem Falle

$$\rho(xy)\bigl[x + x\bigl(1+\tan^2(xy)\bigr) - 2x\bigr] = y\rho'(xy)x^2 - x\rho'(xy)\bigl(xy+\tan(xy)\bigr)\,,$$

zusammengefasst also

$$x\tan^2(xy)\rho(xy) = -x\tan(xy)\rho'(xy)\,.$$

Die Gleichung $P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dy = 0$ hat zwar $x(y)=0$ als eine Lösung, aber die ursprünglich gegebene Gleichung ist für eine Funktion $y = y(x)$. Wir dividieren daher durch x und setzen $t := xy$. Dann ergibt sich

$$\bigl(\rho(t)\tan t + \rho'(t)\bigr)\tan t = 0\,.$$

Die Differentialgleichung $\rho'(t) = -(\tan t)\rho(t)$ ist beispielsweise für $\rho(t) = \cos t$ erfüllt. Ein integrierender Faktor ist folglich $\mu(x,y) = \cos(xy)$, allerdings nur für (x,y) mit $xy \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. Da $\tan(xy)$ in der zu lösenden Differentialgleichung vorkommt, ist die Gleichung an diesen Stellen aber sowieso nicht definiert. Wir multiplizieren also mit $\cos(xy)$ und erhalten

$$\bigl(xy\cos(xy) + \sin(xy)\bigr)\,dx + x^2\cos(xy)\,dy = 0\,.$$

Für eine Stammfunktion F soll $F_y(x,y) = x^2\cos(xy)$ gelten. Folglich ist

$$F(x,y) = x\sin(xy) + c(x)$$

mit einer gewissen Funktion c. Hieraus ergibt sich

$$F_x(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) + c'(x) \stackrel{!}{=} xy\cos(xy) + \sin(xy)\,.$$

Wir wählen $c(x) = 0$, und mit der Stammfunktion $F(x,y) = x\sin(xy)$ lassen sich sämtliche Lösungen y in impliziter Form darstellen durch

$$x\sin(xy) = C \qquad (C\in\mathbb{R})\,.$$

Aufgabe 13 **a)** Wir probieren erst Lösungen mit $y''(x) = 0$ für alle x. Dann haben wir $y(x) = ax + b$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man $ax + b = \frac{1}{2}x^2 - ax + a^2$. Keine Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ können dies für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.
Wir probieren nun Lösungen mit $y''(x) \neq 0$.
Setze $t := \dot{y}(x)$, $x = \psi(t)$ und $y = \chi(t)$. Wir erhalten dann das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \chi(t) = \frac{1}{2}\psi(t)^2 - \psi(t)t + t^2 & (1) \\ \dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t) & (2). \end{cases}$$

Leite (1) nach t ab, und erhalte $\dot{\chi}(t) = \psi(t)\dot{\psi}(t) - \psi(t) - \dot{\psi}(t)t + 2t$.
Setze dies nun in (2) ein: $t\dot{\psi}(t) = \psi(t)\dot{\psi}(t) - \psi(t) - t\dot{\psi}(t) + 2t$, d.h. $0 = (\psi(t) - 2t)(\dot{\psi}(t) - 1)$.
Fall 1: $\psi(t) = 2t$. Insbesondere ist $\dot{\psi}(t) = 2 \neq 0$.
Aus (1) folgt sofort $\chi(t) = 2t^2 - 2t^2 + t^2 = t^2 = \frac{1}{4}(\psi(t))^2$.
Wir sehen, dass $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ Lösung ist, da $\dot{\chi}(t) = 2t = t\dot{\psi}(t)$.
Fall 2: $\dot{\psi}(t) = 1$. Dann folgt $\psi(t) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (1) ergibt

$$\chi(t) = \frac{1}{2}(t+c)^2 - (t+c)t + t^2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}c^2.$$

Es gilt $t = \psi(t) - c = x - c$. Damit ergibt (1) die folgende Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - x(x-c) + (x-c)^2 = \frac{1}{2}x^2 - cx + c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Fall 1: Durch $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ ist genau dann eine Lösung mit $y(x_0) = y_0$ gegeben, wenn $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$.
Fall 2: Bei Lösungen der Form $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - cx + c^2$ führt die Forderung $y(x_0) = y_0$ auf

$$\tfrac{1}{2}x_0^2 - cx_0 + c^2 = y_0\,, \qquad \text{also} \qquad c^2 - x_0c + (\tfrac{1}{2}x_0^2 - y_0) = 0 \;\; (*).$$

Diese quadratische Gleichung für c ist genau dann lösbar, wenn $x_0^2 - 4(\frac{1}{2}x_0^2 - y_0) \geqslant 0$ gilt. In diesem Falle, also für $y_0 \geqslant \frac{1}{4}x_0^2$, existieren Lösungen, die $y(x_0) = y_0$ erfüllen.
Wir halten fest: Das Anfangswertproblem ist genau dann lösbar, wenn $y_0 \geqslant \frac{1}{4}x_0^2$ gilt.

c) Ist $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$, so sind $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - cx + c^2$ mit $c = \frac{1}{2}x_0$ Lösungen. Ist $y_0 > \frac{1}{4}x_0^2$, so sind $y_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - c_kx + c_k^2$ (für $k = 1, 2$) verschiedene Lösungen, wobei hier c_1, c_2 die Lösungen von $(*)$ sein sollen.
Folglich gibt es nie *genau eine* Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 14 Es handelt sich um eine implizite Differentialgleichung der Form $F(x, y, y') = 0$ mit $F(x, y, z) = \ln^2(z) + z - x$. Wir gehen wie in 1.8 (a), (b) des Vorlesungsskripts vor:

a) Der Ansatz $F(x, ax + b, a) = 0$ liefert $x = \ln^2(a) + a$. Es gibt kein Intervall I so, dass diese Gleichung für alle $x \in I$ gilt. Es gibt also keine Geraden als Lösungen.

b) Wir machen den Ansatz $t = y', \chi(t) = y, \psi(t) = x$ und erhalten $\psi(t) = \ln^2(t) + t$ sowie $\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t)$. Damit folgt $\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t) = t(2\frac{\ln t}{t} + 1) = 2\ln t + t$ und somit $\chi(t) = \int 2\ln t + t\,dt = 2(t\ln t - t) + \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}t^2 + 2t\ln t - 2t + C$. Für $t_0 = 1$ gilt $\psi(t_0) = 1$. Damit folgt mit der Anfangswertbedingung $y_0 = y(1) = \chi(t_0) = \frac{1}{2}t_0^2 + 2t_0\ln t_0 - 2t_0 + C = -3/2 + C$, also $C = y_0 + 3/2$. Wir erhalten insgesamt $\psi(t) = \ln^2(t) + t$ und $\chi(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t\ln t - 2t + y_0 + 3/2$. Das ist die gesuchte Lösung in Parameterform.

Bemerkung zu b): Um eine Lösung $y = y(x)$ zu erhalten, müsste man die Gleichung $\psi = \ln^2(t) + t$ lokal um $t_0 = 1$ nach t auflösen. Das ist zwar möglich (nach dem Satz über implizite Funktionen, denn $\dot{\psi}(t_0) = 2\frac{\ln t_0}{t_0} + 1 = 1 \neq 0$), aber man kann hier keine explizite Umkehrfunktion angeben.

Aufgabe 15 Wir stellen fest, dass t nicht explizit in der Differentialgleichung vorkommt. Wir behandeln die Differentialgleichung als implizite Differentialgleichung der Form $\Phi(r, r', r'') = 0$ mit $\Phi(x, y, z) = z + \frac{\gamma M}{x^2}$ und verwenden die Methoden aus 1.8 (c) des Vorlesungsskripts.
Der Ansatz $\Phi(\tau, p(\tau), \dot{p}(\tau)p(\tau)) = 0$ führt auf $\dot{p}p = -\frac{\gamma M}{\tau^2}$ für die Funktion p. Wir werden nun p bestimmen und danach $r'(t) = p(r(t))$ lösen.
Die Lösungen der Differentialgleichung für p ergeben sich nach Trennung der Veränderlichen: $\int p\, dp = \int -\frac{\gamma M}{\tau^2}\, d\tau$, d. h. $\frac{p^2}{2} = \frac{\gamma M}{\tau} + C$. Aus $p(r(0)) = r'(0)$ folgt mit den Anfangsbedingungen $p(R) = v_0$, also ist $C = \frac{1}{2}v_0^2 - \gamma M/R$ und damit $p^2(\tau) = 2\gamma M(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{R}) + v_0^2$.
Wir quadrieren $r'(t) = p(r(t))$ und erhalten die Differentialgleichung $(r')^2 = 2\gamma M(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) + v_0^2$.
Damit der Ball nicht wieder auf die Erde zurückfällt, muss $r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ gelten.
Aus $2\gamma M(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) + v_0^2 = (r')^2 \geq 0$ folgt in diesem Fall $v_0^2 \geqslant 2\frac{\gamma M}{R}$, also

$$v_0 \geqslant \sqrt{2\frac{\gamma M}{R}} \quad \left(\approx \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^{6}}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 11{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right).$$

Für das kleinste derartige v_0, also für $v_0^2 = 2\gamma M/R$, erhalten wir

$$r' = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}\,.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Ihre Lösungen ergeben sich aus

$$\int \sqrt{\frac{r}{2\gamma M}}\, dr = \int 1\, dt\,, \quad \text{d. h.} \quad \frac{2r^{3/2}}{3\sqrt{2\gamma M}} = t + C\,.$$

Wir erhalten $r(t) = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}\big(t + C\big)\right]^{2/3}$, und die Bedingung $r(0) = R$ führt schließlich auf

$$r(t) = \left[\tfrac{3}{2}\sqrt{2\gamma M} \cdot t + R^{3/2}\right]^{2/3}\,.$$