

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
 Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt**

Aufgabe 16 Für alle $x \in (0, 1)$ gilt $y_1(x) = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$, $y_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ und $y_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, so dass $y_1''(x) - \frac{2}{x(1-x)^2} y_1(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{x(1-x)^2} \cdot \frac{x}{1-x} = 0$ ist. Damit löst y_1 die Gleichung. Nach dem Reduktionsverfahren von d'Alembert kann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit dem Ansatz $y(x) = y_1(x)v(x)$ gewonnen werden. Wegen

$$y' = y_1'v + y_1v', \quad y'' = y_1''v + 2y_1'v' + y_1v''$$

führt dieser Ansatz auf die Gleichung

$$y_1''v + 2y_1'v' + y_1v'' - \frac{2}{x(1-x)^2} y_1v = 0,$$

also $\left(y_1'' - \frac{2}{x(1-x)^2} y_1 \right) v + 2y_1'v' + y_1v'' = 0.$

Da y_1 eine Lösung der Differentialgleichung ist, hat der Ausdruck in der Klammer den Wert 0; die Gleichung für v lautet damit

$$2y_1'v' + y_1v'' = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{2}{(1-x)^2} v' + \frac{x}{1-x} v'' = 0.$$

Für $u := v'$ haben wir folglich die Differentialgleichung

$$\frac{2}{(1-x)^2} u + \frac{x}{1-x} u' = 0, \quad \text{also} \quad u' = \frac{2}{x(x-1)} u.$$

Diese homogene lineare Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u(x) &= C \exp\left(\int \frac{2}{x(x-1)} dx\right) = C \exp\left(\int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} dx\right) \\ &= C \exp(2 \ln|x-1| - 2 \ln|x|) = C \exp\left(2 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right) = C \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Für die Funktion v bedeutet das

$$v'(x) = u(x) = C \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = C \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right),$$

und damit ist

$$v(x) = C \left(x - 2 \ln x - \frac{1}{x}\right) + D = C \left(\frac{x^2-1}{x} - 2 \ln x\right) + D \quad (C, D \in \mathbb{R}).$$

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung für y ergibt sich daher

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x)v(x) = \frac{Cx}{1-x} \left(\frac{x^2-1}{x} - 2 \ln x\right) + \frac{Dx}{1-x} \\ &= C \left(-(x+1) - \frac{2x \ln x}{1-x}\right) + \frac{Dx}{1-x} \quad (C, D \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir setzen noch $c_1 := -C$ und $c_2 := D$; dann lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \left(x + 1 + \frac{2x \ln x}{1-x}\right) + \frac{c_2 x}{1-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 17 Wegen $xe^x - (2x + 1)e^x + (x + 1)e^x = e^x(x - 2x - 1 + x + 1) = 0$ ist $u(x) = e^x$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Der Ansatz $y(x) = u(x)v(x)$ führt auf

$$\begin{aligned} xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y &= x(u''v + 2u'v' + uv'') - (2x + 1)(u'v + uv') + (x + 1)uv \\ &= \underbrace{(xu'' - (2x + 1)u' + (x + 1)u)}_{=0, \text{ da } u \text{ die hom. Glg. löst}}v + (2xu' - (2x + 1)u)v' + xuv'' \\ &= -e^xv' + xe^xv'' \\ &\stackrel{!}{=} (x^2 + 1)e^x. \end{aligned}$$

Für $w := v'$ haben wir folglich die Differentialgleichung

$$xw' - w = x^2 + 1. \quad (*)$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $w' = \frac{1}{x}w$ lautet

$$w_h(x) = C \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung $(*)$ erhält man mit dem Ansatz $w_p(x) = C(x)x$ ("Variation der Konstanten"). Also

$$x(C'(x)x + C(x)) - C(x)x \stackrel{!}{=} x^2 + 1, \quad \text{d.h.} \quad C'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Wir wählen $C(x) = x - \frac{1}{x}$ und erhalten $w_p(x) = x^2 - 1$. Damit ist die allgemeine Lösung von $(*)$

$$w(x) = x^2 - 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R},$$

und es folgt

$$v(x) = \int w(x) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}Cx^2 + C_2, \quad C, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist damit

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 - x + C_2\right)e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 18

- Das charakteristische Polynom der Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$, also $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5)$, besitzt die einfachen Nullstellen 1 und -5 . Daher ist e^x, e^{-5x} ein Fundamentalsystem, d.h. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-5x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ist die allgemeine Lösung von $y'' + 4y' - 5y = 0$.
- Hier lautet das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2 - 6\lambda + 25$. Dieses hat die einfachen Nullstellen $3 \pm 4i$. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $e^{3x} \sin(4x), e^{3x} \cos(4x)$, so dass die allgemeine Lösung von $y'' - 6y' + 25y = 0$ durch $y(x) = c_1e^{3x} \sin(4x) + c_2e^{3x} \cos(4x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, gegeben ist.
- Das charakteristische Polynom von $y''' - y'' + y' - y = 0$ ist $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$. Da dieses die einfachen Nullstellen 1, $-i, i$ besitzt, ist $e^x, \sin x, \cos x$ ein zugehöriges Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung von $y''' - y'' + y' - y = 0$ lautet folglich $y(x) = c_1e^x + c_2 \sin x + c_3 \cos x$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y'''' - y''' + 4y'' - 4y' = 0$ lautet $\lambda^4 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$ und besitzt die einfachen Nullstellen 0, 1, $-2i, 2i$. Deshalb ist 1, $e^x, \sin(2x), \cos(2x)$ ein Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung von $y'''' - y''' + 4y'' - 4y' = 0$ ergibt sich $y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3 \sin(2x) + c_4 \cos(2x)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

e) Hier ist das charakteristische Polynom gleich $\lambda^4 + 1$. Aufgrund von

$$\begin{aligned} \lambda^4 = -1 &\iff \lambda^2 = i \text{ oder } \lambda^2 = -i \iff \lambda^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ oder } \lambda^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \lambda = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda = -e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff \lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ oder } \lambda = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \text{ oder } \lambda = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \text{ oder } \lambda = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

sind $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ die (einfachen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit ist $e^{x/\sqrt{2}} \sin(x/\sqrt{2}), e^{x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}), e^{-x/\sqrt{2}} \sin(x/\sqrt{2}), e^{-x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2})$ ein Fundamentalsystem von $y^{(4)} + y = 0$ und die allgemeine Lösung lautet $y(x) = c_1 e^{x/\sqrt{2}} \sin(x/\sqrt{2}) + c_2 e^{x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}) + c_3 e^{-x/\sqrt{2}} \sin(x/\sqrt{2}) + c_4 e^{-x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}), c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 19

a) Die homogene Gleichung $y''' - y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

mit den jeweils einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Somit ist

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad \varphi_2(x) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right), \quad \varphi_3(x) = e^{-x/2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet $y = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung die Gestalt $q(x)e^{0x}$ hat, wobei q ein Polynom vom Grad 2 ist, und 0 keine Nullstelle von p ist, können wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem entsprechenden Ansatz $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ erhalten. Dieser liefert

$$y_p''' - y_p = 0 - (ax^2 + bx + c) \stackrel{!}{=} 1 + x^2,$$

und wir schließen $a = -1, b = 0$ und $c = -1$, bekommen also $y_p(x) = -x^2 - 1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = -x^2 - 1 + c_1 e^x + e^{-x/2} [c_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c_3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)] \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

b) Hier hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1 , d. h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist diesmal von der Form $q(x)e^{2x}$ mit einem Polynom q vom Grad 1. Da 2 keine Nullstelle von p ist, machen wir den Ansatz $y_p(x) = (ax + b)e^{2x}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y_p' &= ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}, \\ y_p'' &= 2ae^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$y_p'' - y_p = (4ax + 4a + 4b)e^{2x} - (ax + b)e^{2x} = (3ax + 4a + 3b)e^{2x} \stackrel{!}{=} xe^{2x},$$

was auf $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{4}{9}$ führt. Mit $y_p(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$ erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung schließlich

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- c) Die homogene Gleichung haben wir schon in **b)** behandelt. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung diesmal xe^{1x} lautet und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p mit Vielfachheit $\nu = 1$ ist, reicht es hier nicht, einen Ansatz der Form $(ax + b)e^x$ zu machen; vielmehr muss man $y_p(x) = x^\nu(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$ betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned}y_p' &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x, \\y_p'' &= (2ax + 2a + b)e^x + (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x,\end{aligned}$$

d. h. mit diesem Ansatz hat man

$$y_p'' - y_p = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx)e^x = (4ax + 2a + 2b)e^x \stackrel{!}{=} xe^x.$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1e^x + c_2e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Damit ergibt sich $y(0) = c_1 + c_2$ und $y'(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1e^x - c_2e^{-x}$, also $y'(0) = -\frac{1}{4} + c_1 - c_2$. Beides soll = 0 sein, das bedeutet $c_1 = -c_2 = \frac{1}{8}$. Das Anfangswertproblem hat somit die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x + \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{8}e^{-x} = \frac{1}{8}(2x^2 - 2x + 1)e^x - \frac{1}{8}e^{-x}.$$

- d) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ hat die einfachen Nullstellen 0, 1 und 3, d. h. die homogene Gleichung besitzt

$$y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^x + c_3e^{3x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

als allgemeine Lösung. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist von der Form

$$(2 \cos(1x) + 4 \sin(1x))e^{0x}.$$

Da $0 + 1i$ keine Nullstelle von p ist, können wir als Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y_p(x) = a \cos(1x) + b \sin(1x)$ wählen. Es gilt

$$y_p' = -a \sin x + b \cos x, \quad y_p'' = -a \cos x - b \sin x, \quad y_p''' = a \sin x - b \cos x,$$

und damit ergibt sich

$$y_p''' - 4y_p'' + 3y_p' = (a + 4b - 3a) \sin x + (-b + 4a + 3b) \cos x \stackrel{!}{=} 2 \cos x + 4 \sin x.$$

Dies liefert die Gleichungen

$$-2a + 4b = 4 \quad \text{und} \quad 4a + 2b = 2,$$

also $a = 0$ und $b = 1$. Somit haben wir als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y_p(x) = \sin x$ und als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \sin x + c_1 + c_2e^x + c_3e^{3x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: Mit $z := y'$ könnte man auch $z'' - 4z' + 3z = 2 \cos x + 4 \sin x$ betrachten und die ermittelte Lösung z dann noch integrieren.

Aufgabe 20 a) Diese Eulersche Differentialgleichung behandeln wir, indem wir die neue Variable $t = \ln x$ einführen. Die Gleichung wird dann wegen $x = e^t$ zu

$$e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t) - y(e^t) = t.$$

Mit $u(t) := y(e^t)$ haben wir $u'(t) = e^ty'(e^t)$ und $u''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$. Unsere Gleichung lautet somit

$$u''(t) - u(t) = t.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1 hat, ist die allgemeine Lösung von $u'' - u = 0$ gegeben durch $u(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Da die Inhomogenität $te^{0 \cdot t}$ ein Polynom vom Grad 1 und 0 keine Nullstelle von p ist, gewinnen wir eine spezielle Lösung u_p der inhomogenen Gleichung, indem wir dafür ein Polynom vom Grad 1 als Ansatz nehmen, etwa $u_p(t) = at + b$. Dann ist $u_p'' - u_p = -u_p = -at - b$. Eine Lösung ergibt sich also für $a = -1$ und $b = 0$, d. h. es ist $u_p(t) = -t$. Als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir folglich

$$u(t) = -t + c_1e^t + c_2e^{-t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

und durch Rücksubstitution erhalten wir

$$y(x) = u(\ln x) = -\ln x + c_1x + c_2x^{-1} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Es gilt $y'(x) = -x^{-1} + c_1 - c_2x^{-2}$. Die Bedingungen $y(1) = 2$ und $y'(1) = -1$ bedeuten $c_1 + c_2 = 2$ und $-1 + c_1 - c_2 = -1$, also $c_1 = c_2 = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = -\ln x + x + x^{-1}.$$

b) Wir multiplizieren mit x^2 und bekommen die Eulersche Differentialgleichung

$$x^4y^{(4)} + 5x^3y''' + x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Dann substituieren wir wieder $x = e^t$ und erhalten für $u(t) := y(e^t)$

$$u'(t) = e^ty'(e^t) = xy'(x), \quad u''(t) = e^ty'(e^t) + (e^t)^2y''(e^t) = xy'(x) + x^2y''(x),$$

was insbesondere $x^2y'' = u'' - xy' = u'' - u'$ liefert. Weiter hat man

$$u'''(t) = e^ty'(e^t) + 3(e^t)^2y''(e^t) + (e^t)^3y'''(e^t) = xy'(x) + 3x^2y''(x) + x^3y'''(x),$$

also $x^3y''' = u''' - 3(u'' - u') - u' = u''' - 3u'' + 2u'$. Schließlich gilt noch

$$u^{(4)}(t) = e^ty'(e^t) + 7(e^t)^2y''(e^t) + 6(e^t)^3y'''(e^t) + (e^t)^4y^{(4)}(e^t),$$

also $x^4y^{(4)} = u^{(4)} - 6(u''' - 3u'' + 2u') - 7(u'' - u') - u' = u^{(4)} - 6u''' + 11u'' - 6u'$. Insgesamt kommen wir zu der Differentialgleichung

$$(u^{(4)} - 6u''' + 11u'' - 6u') + 5(u''' - 3u'' + 2u') + (u'' - u') + 2u' - 2u = 0,$$

also zu $u^{(4)} - u''' - 3u'' + 5u' - 2u = 0$. Für das zugehörige charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2$ erraten wir die Nullstelle $\lambda = -2$; Polynomdivision liefert $p(\lambda) = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4e^{-2t} \quad (c_k \in \mathbb{R}),$$

und Rücksubstitution führt dann auf

$$y(x) = u(\ln x) = c_1x + c_2x \ln x + c_3x(\ln x)^2 + c_4x^{-2} \quad (c_k \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 21 a) Wir machen einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

für (zu bestimmende) Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y' + xy &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= (0+1) c_{0+1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) c_{n+1} + c_{n-1} \right) x^n. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht 0, so dass ein Koeffizientenvergleich

$$c_1 = 0 \quad \text{und} \quad c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

liefert. Es gilt $c_3 = c_{2+1} = -\frac{c_{2-1}}{2+1} = 0$, und damit auch $c_5 = c_7 = c_9 = \dots = 0$.

Da kein Anfangswert vorgegeben ist, gibt es keine Bedingung an c_0 , so dass $c_0 \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist. Aus der Rekursionsvorschrift ergeben sich dann die Werte

$$c_2 = \frac{-c_0}{2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2 \cdot 4}, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6} = \frac{-c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad c_8 = -\frac{c_6}{8} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8},$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$ (IV). Dann folgt mit der Rekursionsformel

$$c_{2(n+1)} = c_{(2n+1)+1} = -\frac{c_{2n}}{(2n+2)} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(-1)^{n+1} c_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+2)}.$$

Nun kennen wir alle Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von y . Die allgemeine Lösung von $y' + xy = 0$ lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^{2n} + 0 \\ &= c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} x^{2n} \right) = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} \right) = c_0 e^{-x^2/2}, \quad c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Wieder machen wir einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

(Wegen der Anfangsbedingungen kennen wir schon die Koeffizienten $c_0 = y(0) = 0$ und $c_1 = y'(0) = 1$.) Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 2y'' - xy' + 2y &= 2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k \\ &= 2(0+2)(0+1) c_{0+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2(k+2)(k+1) c_{k+2} - k c_k + 2c_k \right) x^k + 2c_0 \\ &= 2c_0 + 4c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2(k+2)(k+1) c_{k+2} - (k-2) c_k \right) x^k. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$4 - x \cos x = 4 - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n+1}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also zum einen

$$2c_0 + 4c_2 = 4,$$

woraus wegen $c_0 = 0$ unmittelbar $c_2 = 1$ folgt, zum anderen

$$2(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k = \begin{cases} 0, & k = 2n \quad (n \geq 1), \\ (-1)^{n+1}/(2n)!, & k = 2n+1 \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

Aus der ersten Zeile hiervon ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$c_{2n+2} = \frac{(2n-2)c_{2n}}{2(2n+2)(2n+1)} \quad (n \geq 1).$$

Für $n = 1$ folgt $c_4 = 0$, und damit auch $c_6 = c_8 = \dots = 0$. Die zweite Zeile liefert

$$c_{2n+3} = \frac{(2n-1)c_{2n+1} + (-1)^{n+1}/(2n)!}{2(2n+3)(2n+2)} \quad (n \geq 0).$$

Wegen $c_1 = 1$ ergeben sich dann die Werte

$$c_3 = \frac{-c_1 - 1}{12} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}, \quad c_5 = \frac{c_3 + 1/2}{40} = \frac{1/3}{40} = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!},$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (n \geq 0),$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionschluss: Gilt die Formel $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ (IV) für ein $n \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} c_{2(n+1)+1} = c_{2n+3} &= \frac{(2n-1)c_{2n+1} + (-1)^{n+1}/(2n)!}{2(2n+3)(2n+2)} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(2n-1)(-1)^n}{2(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+3)(2n+2)(2n)!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(-2n+1)}{2(2n+3)!} + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zusammen:

$$c_0 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_{2n} = 0 \quad (n \geq 2), \quad c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt:

$$y(x) = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x^2 + \sin x.$$