Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2010/2011
02.12.2010

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**5. Übungsblatt**

### Aufgabe 22

Bestimmen Sie unter Verwendung eines abgewandelten Potenzreihenansatzes die allgemeine Lösung von

$$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' + xy = 0 \qquad (x > 0)\,.$$

### Aufgabe 23

Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' + 7y' + \frac{9}{x}y = 0 \qquad (x > 0)$$

mit einem abgewandelten Potenzreihenansatz. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

### Aufgabe 24

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $I$ ein offenes Intervall, das $a$ enthält, und $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b$$

gegeben. Wir wollen eine Lösung iterativ bestimmen und definieren dazu die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen $I \to \mathbb{R}$ durch

$$y_0(x) := b, \qquad y_{n+1}(x) := b + \int_a^x f(t, y_n(t))\,dt \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,\ x \in I.$$

**a)** Es sei $I = \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = xy, \quad y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sowie die Grenzfunktion $y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ $(x \in I)$. Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems?

**b)** Es sei $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = x^2 + xy^2, \quad y(0) = 0.$$

Berechnen Sie $y_n$ für $n = 0, 1, 2, 3$. Begründen Sie, dass $y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ $(x \in I)$ existiert und eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

— bitte wenden —

**c)** Es sei $I = (-1, 1)$ und das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0,$$

wobei

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = 0, \ |y| < 1, \\ 2x & , 0 < |x| < 1, \ -1 < y < 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x} & , 0 < |x| < 1, \ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ -2x & , 0 < |x| < 1, \ x^2 < y < 1. \end{cases}$$

**i)** Vergewissern Sie sich, dass $f$ auf $(-1, 1) \times (-1, 1)$ stetig ist.

**ii)** Zeigen Sie, dass es zwei Funktionen $z_1$, $z_2$ so gibt, dass $y_n = z_1$ für ungerade $n$ und $y_n = z_2$ für gerade $n \geqslant 2$ gilt.

**iii)** Sind $z_1$ und $z_2$ Lösungen des Anfangswertproblems?

### Aufgabe 25

Aus der Vorlesung wissen wir, dass ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit stetiger Funktion $f$ immer eine Lösung besitzt (Existenzsatz von Peano). In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass die Lösung nicht eindeutig zu sein braucht und dass auch maximale Lösungen verschiedene Existenzintervalle haben können.
Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{|y|} & , |y| \leqslant 1, \\ y^2 & , |y| > 1 \end{cases}$$

und dem Anfangswert $y(0) = 0$.

**a)** Begründen Sie, dass dieses Anfangswertproblem (mindestens) eine Lösung besitzt.

**b)** Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = 0$.

*Anleitung:* Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton wachsend ist.
Es sei $I = [x_0, x_0 + \delta)$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Wie lautet $y$,

i) falls $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$ gilt?

ii) falls $0 < y(x) \leqslant 1$ für alle $x \in I$ gilt?

Bauen Sie nun aus diesen beiden Lösungen und einer dritten trivialen Lösung die maximalen Lösungen $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ des ursprünglichen Anfangswertproblems zusammen.

### Aufgabe 26

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung dar. Schreiben Sie dazu $z_1 := y$, $z_2 := y', \ldots, z_n := y^{(n-1)}$ und $\vec{z} := (z_1, \ldots, z_n)$. Geben Sie nun eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so an, dass $\vec{z}$ genau dann Lösung von

$$\vec{z}\,' = A\vec{z}$$

ist, wenn $y$ die Differentialgleichung $(*)$ erfüllt. Berechnen Sie außerdem $\det(\lambda I - A)$.