Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2010/2011

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 22 Für $x > 0$ machen wir einen abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho},$$

d. h. wir suchen Zahlen c_n und ρ so, dass durch diese Reihe eine Lösung gegeben ist. Es gilt

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)c_n x^{n+\rho-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)c_n x^{n+\rho-2}.$$

Folglich erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&x^2y'' + \frac{3}{2}xy' + xy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)c_n x^{n+\rho} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)c_n x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho+1} \\
&= \rho(\rho-1)c_0x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)c_n x^{n+\rho} \\
&\qquad + \frac{3}{2}\rho c_0 x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}(n+\rho)c_n x^{n+\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}x^{m+\rho} \\
&= \Big(\rho(\rho-1) + \frac{3}{2}\rho\Big)c_0x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+\rho)(n+\rho-1)c_n + \frac{3}{2}(n+\rho)c_n + c_{n-1}\Big)x^{n+\rho} \\
&= \rho(\rho+1/2)c_0x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+\rho)(n+\rho+1/2)c_n + c_{n-1}\Big)x^{n+\rho}.
\end{aligned}$$

In 1.14 wurde diese Rechnung allgemein durchgeführt. In dortiger Notation ist $p(x) = \frac{3}{2}$ und $q(x) = x$. Insbesondere gilt dann $p_0 = \frac{3}{2}$ und $q_0 = 0$, so dass die determinierende Gleichung $0 = \rho(\rho-1) + \frac{3}{2}\rho = \rho(\rho+\frac{1}{2})$ lautet (vgl. erster Summand). Diese hat die Lösungen $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = -\frac{1}{2}$. Weil ρ_1, ρ_2 reell sind und $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}_0$ gilt, gibt es nach dem Satz in 1.14 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung von der Form

$$y_1(x) = x^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = x^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

mit $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ und $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ $(n \geqslant 1)$. Um die Koeffizienten zu bestimmen, führen wir einen Koeffizientenvergleich (mit der rechten Seite $0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0\,x^n$) durch:

Im Fall $\rho = \rho_1 = 0$ soll für alle $n \geqslant 1$ gelten

$$n(n+1/2)c_n + c_{n-1} = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad c_n = -\frac{4c_{n-1}}{(2n+1)2n}.$$

Wir setzen $c_0 = 1$ (alles außer Null wäre möglich). Dann liefert diese Rekursionsvorschrift

$$c_1 = -\frac{4c_0}{3 \cdot 2} = -\frac{4}{3!}\,, \qquad c_2 = -\frac{4c_1}{5 \cdot 4} = \frac{4^2}{5!}\,.$$

Wir vermuten $c_n = (-4)^n/(2n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was wir induktiv bestätigen: Der Induktionsanfang ist schon erledigt, und wenn die Formel für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (IV), so folgt

$$c_{n+1} = -\frac{4c_n}{(2(n+1)+1)2(n+1)} \overset{\text{IV}}{=} -\frac{4}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} = \frac{(-4)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-4)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\,.$$

Die erste Lösung, die wir gefunden haben, lautet also

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}\, x^{n+0} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \big(2\sqrt{x}\,\big)^{2n+1} = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,.$$

Nun zu $\rho = \rho_2 = -\frac{1}{2}$. In diesem Falle liefert ein Koeffizientenvergleich (vgl. Rechnung von zuvor mit d_n anstelle der c_n)

$$(n - \tfrac{1}{2})(n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})d_n + d_{n-1} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad d_n = -\frac{4d_{n-1}}{2n(2n-1)} \qquad (n \geqslant 1)\,,$$

und mit $d_0 = 1$ ergibt sich dann $d_n = (-4)^n/(2n)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was man völlig analog zum ersten Fall mit vollständiger Induktion bestätigt. Dies liefert die Lösung

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}\, x^{n-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \big(2\sqrt{x}\,\big)^{2n} = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,.$$

Wir haben jetzt zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = \frac{A\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{B\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad (A, B \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: Die Lösung, die sich für $\rho = \rho_1$ ergibt, ist eine Potenzreihe; man hätte sie daher auch mit einem normalen Potenzreihenansatz finden können.

Aufgabe 23 Durch Multiplikation der Differentialgleichung $xy'' + 7y' + \frac{9}{x}\,y = 0$ mit $x \in (0, \infty)$ erhalten wir eine äquivalente Differentialgleichung, passend zu der Form (1) in 1.14,

$$x^2y'' + 7xy' + 9y = 0\,. \tag{$*$}$$

In der Notation von 1.14 ist $p(x) = 7$ und $q(x) = 9$, so dass $p_0 = 7$ und $q_0 = 9$ ist, was auf die determinierende Gleichung $0 = \rho(\rho-1) + 7\rho + 9 = (\rho+3)^2$ führt. Diese hat nur $\rho = -3$ als Lösung. Nach dem Satz in 1.14 (mit $\rho_1 = \rho_2 = -3$) hat $(*)$ ein Fundamentalsystem der Gestalt

$$y_1(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = (\ln x)y_1(x) + x^\rho \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n,$$

wobei $c_0 \neq 0$ (und $d_0 = 0$; daher beginnt die Reihe im Ansatz für y_2 bei $n = 1$) mit zu berechnenden $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ $(n \geqslant 1)$. Für $x > 0$ machen wir den abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-3}$$

(wobei $c_0 \neq 0$ vorausgesetzt ist) und haben damit für die Ableitungen die Darstellungen

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-3)c_n x^{n-4}\,, \qquad y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-3)(n-4)c_n x^{n-5}\,.$$

Also erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung $(*)$

$$\begin{aligned}
x^2y_1''+7xy_1'+9y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)c_nx^{n-3} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}7(n-3)c_nx^{n-3}+\sum_{n=0}^{\infty}9c_nx^{n-3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n-3)(n-4)+7(n-3)+9\Big)c_nx^{n-3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n^2c_nx^{n-3}\,.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Differentialgleichung 0 ist, folgt $c_1=c_2=\cdots=0$. Setzen wir $c_0:=1$, so haben wir die Lösung

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n-3}=\frac{1}{x^3}\,.$$

Wie zuvor festgestellt, kann man eine von y_1 unabhängige Lösung mit dem Ansatz

$$y_2(x)=(\ln x)y_1(x)+x^{-3}\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^n=\frac{\ln x}{x^3}+\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^{n-3}$$

erhalten. Wegen

$$y_2'(x)=\frac{1-3\ln x}{x^4}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-3)d_nx^{n-4}\,,\qquad y_2''(x)=\frac{-7+12\ln x}{x^5}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-3)(n-4)d_nx^{n-5}\,.$$

lautet hier die linke Seite der Differentialgleichung $(*)$

$$\begin{aligned}
x^2y_2''+7xy_2'+9y_2 &= \frac{-7+12\ln x}{x^3}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-3)(n-4)d_nx^{n-3} \\
&\qquad +7\,\frac{1-3\ln x}{x^3}+\sum_{n=1}^{\infty}7(n-3)d_nx^{n-3}+9\,\frac{\ln x}{x^3}+\sum_{n=1}^{\infty}9d_nx^{n-3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n-3)(n-4)+7(n-3)+9\Big)d_nx^{n-3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n^2d_nx^{n-3}\,.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Differentialgleichung 0 ist, folgt $d_1=d_2=\cdots=0$. Also haben wir

$$y_2(x)=\frac{\ln x}{x^3}\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x)=\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)=\frac{\alpha+\beta\ln x}{x^3}\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})\,.$$

Alternativ: Nachdem man y_1 berechnet hat, kann man die allgemeine Lösung von $(*)$ auch mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert gewinnen. Der Ansatz $y(x)=y_1(x)v(x)$ führt auf

$$\begin{aligned}
x^2y''+7xy'+9y &= x^2\big(y_1''v+2y_1'v'+y_1v''\big)+7x\big(y_1'v+y_1v'\big)+9y_1v \\
&= \big(x^2y_1''+7xy_1'+9y_1\big)v+\big(2x^2y_1'+7xy_1\big)v'+x^2y_1v'' \\
&= \big(2x^2y_1'+7xy_1\big)v'+x^2y_1v''\,,
\end{aligned}$$

weil y_1 eine Lösung der Gleichung $(*)$ ist. Einsetzen von $y_1(x) = \frac{1}{x^3}$ und $y_1'(x) = -3x^{-4}$ liefert

$$x^2y'' + 7xy' + 9y = \left(-\frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^2}\right) v' + \frac{v''}{x} \,,$$

und dies soll $= 0$ sein. Für die Funktion $w := v'$ haben wir also nach Multiplikation mit x die homogene lineare Gleichung

$$\frac{w}{x} + w' = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(x) = a \exp\left(\int -\frac{1}{x}\,dx\right) = a \exp\bigl(-\ln x\bigr) = \frac{a}{x} \qquad (a \in \mathbb{R}) \,.$$

(Man beachte $x > 0$.) Wegen $w = v'$ folgt daraus durch Integration

$$v(x) = a \ln x + b \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \,,$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für y lautet somit

$$y(x) = y_1(x)v(x) = \frac{a \ln x + b}{x^3} \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \,.$$

Aufgabe 24 **a)** Hier ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Definitionsgemäß gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&y_0(x) = 1 \,,\\
&y_1(x) = 1 + \int_0^x t y_0(t)\,dt = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \tfrac{1}{2}\,x^2 \,,\\
&y_2(x) = 1 + \int_0^x t y_1(t)\,dt = 1 + \int_0^x t(1 + \tfrac{1}{2}\,t^2)\,dt = 1 + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,x^4 = 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{2})^2 \,.
\end{aligned}$$

Damit kommen wir zu der Vermutung

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \,,$$

welche wir per Induktion beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Gilt die Formel für dieses n, so folgt

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x t y_n(t)\,dt \overset{\text{IV}}{=} 1 + \int_0^x t \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{t^{2k}}{2^k}\,dt = 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \frac{1}{k!}\,\frac{t^{2k+1}}{2^k}\,dt\\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)\,2^k} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{k+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^j .
\end{aligned}$$

Nach Definition der Exponentialfunktion ergibt sich für die Grenzfunktion

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{x^2/2} \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \,.$$

Wegen $\partial_y f(x, y) = \partial_y[xy] = x$ ist f bezüglich der Variablen y in $I \times \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Somit folgt aus dem Fixpunktiterationsverfahren des Satzes von Picard-Lindelöf, dass y tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist. (Direktes Nachrechnen wäre natürlich auch möglich.)

b) Hier ist $f\colon (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x^2+xy^2$. Für jedes $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ gilt

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 0\,,\\
y_1(x) &= 0+\int_0^x t^2+0\,dt = \tfrac{1}{3}\,x^3\,,\\
y_2(x) &= \int_0^x t^2+t\big(\tfrac{1}{3}\,t^3\big)^2\,dt = \tfrac{1}{3}\,x^3+\tfrac{1}{8\cdot 9}\,x^8\,,\\
y_3(x) &= \int_0^x t^2+t\big(\tfrac{1}{3}\,t^3+\tfrac{1}{8\cdot 9}\,t^8\big)^2\,dt = \tfrac{1}{3}\,x^3+\int_0^x t\big(\tfrac{1}{9}\,t^6+\tfrac{2}{3\cdot 8\cdot 9}\,t^{11}+\tfrac{1}{(8\cdot 9)^2}\,t^{16}\big)\,dt\\
&= \tfrac{1}{3}\,x^3+\tfrac{1}{8\cdot 9}\,x^8+\tfrac{2}{3\cdot 8\cdot 9\cdot 13}\,x^{13}+\tfrac{1}{(8\cdot 9)^2\cdot 18}\,x^{18}\,.
\end{aligned}
$$

Dass $y(x):=\lim_{n\to\infty}y_n(x)$ existiert und das Anfangswertproblem löst, folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, denn f ist stetig partiell nach y differenzierbar: $\partial_y f(x,y)=\partial_y[x^2+xy^2]=2xy$.

c) i) Die Funktion f ist auf $(-1,1)\times(-1,1)$ stetig, denn sie ist in den einzelnen Teilbereichen stetig und die Definitionen stimmen an den gemeinsamen Rändern überein.

ii) Für jedes $x\in(-1,1)$ gilt

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 0\,,\\
y_1(x) &= 0+\int_0^x f(t,0)\,dt = \int_0^x 2t-0\,dt = x^2\,,\\
y_2(x) &= \int_0^x f(t,t^2)\,dt = \int_0^x 2t-4\tfrac{t^2}{t}\,dt = -x^2\,,\\
y_3(x) &= \int_0^x f(t,-t^2)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2\,.
\end{aligned}
$$

Wir brauchen nicht weiterrechnen und sehen, dass $y_n(x)=x^2$ für ungerade n und $y_n(x)=-x^2$ für gerade $n\geqslant 2$ gilt. Definiere also $z_1(x):=x^2$ sowie $z_2(x):=-x^2$.

iii) Wegen

$$
z_1'(x)=2x\neq -2x=2x-4\tfrac{x^2}{x}=f(x,z_1(x))\qquad\text{und}\qquad z_2'(x)=-2x\neq 2x=f(x,z_2(x))
$$

sind weder z_1 noch z_2 Lösungen des Anfangswertproblems. Da f stetig ist, existiert aber nach dem Satz von Peano eine Lösung des Anfangswertproblems.

Insbesondere sieht man, dass f nicht stetig partiell nach y differenzierbar ist, denn sonst müsste die Folge (y_n) nach dem Satz von Picard-Lindelöf für $n\to\infty$ gegen die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems in einer Umgebung von 0 konvergieren.

Aufgabe 25 **a)** Die Funktion f ist stetig in x (was gar nicht explizit auftaucht) und y, also stetig auf $\mathbb{R}^2$. Nach dem Existenzsatz von Peano hat das Anfangswertproblem (mindestens) eine Lösung.

b) Falls y eine Lösung der Differentialgleichung ist, so gilt $y'(x)=f(y(x))\geqslant 0$, denn f nimmt nur nicht-negative Werte an. Daher ist y monoton wachsend.

i) Es sei y eine Lösung von $y'=f(y)$ und es gelte $|y(x)|>1$.
Idee: y löst auch die modifizierte Differentialgleichung

$$
y'=\widetilde{f}(y)\qquad\text{mit }\tilde{f}(y):=y^2. \tag{1}
$$

Dies ist wahr, denn $f(y)=\widetilde{f}(y)$ für alle y mit $|y|>1$, und wir haben zusätzlich vorausgesetzt, dass $|y(x)|>1$ für alle $x\in I$ gilt. Da $\widetilde{f}$ (im Gegensatz zu f) stetig partiell nach y differenzierbar ist, ist die Lösung von $y'=\widetilde{f}(y)$ zusammen mit einem gegebenen Anfangswert $y(x_0)=y_0$ nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig. Unsere Überlegung zeigt, dass die Funktionswerte von y eindeutig durch die folgenden drei Eigenschaften festgelegt sind:

a) y löst die ursprüngliche Differentialgleichung $y = f(y)$;

b) y erfüllt eine Anfangswertbedingung, etwa $y(x_0) = y_0$ für gewisse x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$;

c) es gilt $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$.

Beispielsweise durch Trennung der Variablen sehen wir, dass die Lösung von (1) zusammen mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ folgendermaßen lautet: $y(x) = 0$, falls $y_0 = 0$, bzw. im Fall $y_0 \neq 0$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_{x_0}^{x} dx \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = x - x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = -(x - x_0 - \frac{1}{y_0})^{-1}\,.$$

ii) Wir notieren den Anfangswert $y_0 := y(x_0)$ und wenden dieselbe Idee wie bei i) an. Ist y eine Lösung von $y' = f(y)$ und gilt $0 < y(x) \leqslant 1$ für alle $x \in I$, dann ist y eine Lösung der modifizierten Differentialgleichung

$$y' = \widetilde{f}(y) \qquad \text{mit } \widetilde{f}(y) := \begin{cases} \sqrt{y} & , y \geqslant y_0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \sqrt{y_0} & , y < y_0. \end{cases}$$

Man beachte, dass y ja monoton wachsend ist und somit nur die erste Zeile in der Definition von $\widetilde{f}$ zum Tragen kommt. Das wichtige an der zweiten Zeile ist dann nur, dass $\widetilde{f}$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion wird. Wieder garantiert der Satz von Picard-Lindelöf (angewandt auf die modifizierte Differentialgleichung $y' = \widetilde{f}(y)$), dass y eindeutig festgelegt ist durch:

$$y \text{ löst die ursprüngliche Differentialgleichung } y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad 0 < y(x) \leqslant 1.$$

Und wieder bestimmen wir y mit Trennung der Variablen (vgl. auch Bsp. 2) in 1.2)

$$y(x) = \frac{(x - C)^2}{4}\,.$$

Dann ist $y'(x) = \frac{(x-C)}{2}$. Da $y(x) > 0$ und $y'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in I$ gelten soll, fordern wir $C < x_0$.

Nun bestimmen wir die maximalen Lösungen des ursprünglichen Problems:

Es ist klar, dass $y \equiv 0$ eine triviale Lösung von $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ ist.

Sei $a \in (0, \infty)$ und $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ eine maximale, nicht fortsetzbare Lösung. Wir setzen

$$c := \sup\{x \geqslant 0 : \ y(x) = 0\}$$

und

$$d := \sup\{x \geqslant c : \ y(x) \leqslant 1\}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $|y(x)| \to \infty$ für $x \to a-$ gilt ("Blow-up"). Daher ergibt sich $0 \leqslant c < d < a$. Aufgrund der Monotonie von y wissen wir, dass y eingeschränkt auf $(c, d]$ eine Lösung wie in Teil ii) und auf $[d, a)$ eine Lösung wie in Teil i) ist. Da bei a der Blow-up stattfinden muss, gilt $y(x) = -(x-a)^{-1}$ für alle $x \in [d, a)$. Wegen $-(x-a)^{-1} > 1 \iff x > a-1$ folgt zunächst

$$d = a - 1\,.$$

Da y als Lösung insbesondere stetig ist, muss $y(d) = \frac{(d-C)^2}{4} \overset{!}{=} -(d - a)^{-1} = 1$ gelten; somit führt Einsetzen von $d = a - 1$ und Umstellen nach C auf

$$C = a - 3\,.$$

Also ist $y(x) = \frac{(x-(a-3))^2}{4}$ für alle $x \in (c, d] = (c, a - 1]$, was auf $c = a - 3$ führt. Die Forderung $c \geqslant 0$ ergibt schließlich $a \geqslant 3$.

Fazit: Es gilt $a \geqslant 3$ und $y \colon [0, a) \to \mathbb{R}$ ist von der Form

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant a - 3\,, \\ \frac{(x-(a-3))^2}{4} & , x \in (a - 3, a - 1]\,, \\ -(x - a)^{-1} & , x \in (a - 1, a)\,. \end{cases}$$

Umgekehrt kann man leicht prüfen, dass dieses y auch tatsächlich eine maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ ist. Zusammen mit der trivialen Lösung $y(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$, haben wir alle maximalen Lösungen bestimmt.

Aufgabe 26 Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0\,, \qquad (*)$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $z_1 := y$, $z_2 := y', \ldots, z_n := y^{(n-1)}$ und setzen

$$\vec{z}(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Erfüllt y die Gleichung $(*)$, so ist $\vec{z}$ eine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung und umgekehrt:

$$\begin{aligned}
z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x)\,, \\
z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x)\,, \\
&\vdots \\
z_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) = z_n(x)\,, \\
z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -a_0z_1(x) - a_1z_2(x) - \ldots - a_{n-1}z_n(x)\,,
\end{aligned}$$

also

$$\vec{z}\,'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}'(x) \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A\in\mathbb{R}^{n\times n}} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ z_n(x) \end{pmatrix} = A\vec{z}(x)\,.$$

Wir rechnen nun per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ nach

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\,. \qquad (+)$$

IA: Für $n = 1$ gilt $A = \begin{pmatrix} -a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und daher $\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda + a_0 \end{pmatrix} = \lambda + a_0$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n sei $(+)$ erfüllt (IV). Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned}
\det \underbrace{(\lambda I - A)}_{\in\mathbb{R}^{n+1\times n+1}} &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \lambda & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+2}a_0 \det \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \lambda(\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda + a_1) + (-1)^{n+2}a_0(-1)^n \\
&= \lambda^{n+1} + a_n\lambda^n + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,.
\end{aligned}$$