Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2010/2011
16.12.2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

6. Übungsblatt

Aufgabe 27

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} u'(t) &= 3u(t) + \ \ v(t) - w(t) \\ v'(t) &= \ \ u(t) + 3v(t) - w(t) \\ w'(t) &= 3u(t) + 3v(t) - w(t) \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem von

$$\textbf{i)} \quad \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}\,; \qquad \textbf{ii)} \quad \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

Aufgabe 28

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

sowie die spezielle Lösung zu dem Anfangswert $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, wobei die Matrix A, die Funktion $\vec{b}$ und der Anfangswert $\vec{y}_0$ gegeben sind durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}\,,$$

a) indem Sie die Matrixexponentialfunktion explizit ausrechnen;

b) indem Sie das System in *eine* Differentialgleichung 2. Ordnung umwandeln und die resultierende Gleichung lösen.

Aufgabe 30

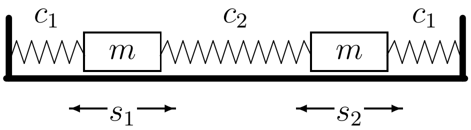
Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie e^{tA} für die folgenden Matrizen A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 42 & 1 & 2 \\ 0 & 42 & 2 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Hinweis zu c): Überlegen Sie sich zunächst, dass $e^{tSBS^{-1}} = Se^{tB}S^{-1}$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle regulären $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.

Aufgabe 31

Gegeben ist das folgende, reibungsfrei schwingende System,



bestehend aus zwei Massen $m > 0$, die mit einer Feder der Federkonstanten $c_2 > 0$ aneinander gekoppelt und jeweils durch Federn (mit Federkonstante $c_1 > 0$) an der linken bzw. rechten Wand befestigt sind.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf, wenn mit s_1 und s_2 die Auslenkungen der Wagen um ihre jeweilige Gleichgewichtslage bezeichnet werden.

b) Lösen Sie das in a) erhaltene Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{c_1+c_2}{m} & \dfrac{c_2}{m} \\ \dfrac{c_2}{m} & -\dfrac{c_1+c_2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Argumentieren Sie ähnlich wie in Aufgabe 6 (4. Übungsblatt, HM II), um zwei entkoppelte Differentialgleichungen zu erhalten. Alternativ kann man auch das gegebene System als System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben.

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2011 !

Die **Prüfung** zur HM III findet am Montag, den 28.02.2011, 11:00 - 13:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 11.02.2011.**
Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.