

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt**

Aufgabe 27 a) Das System kann man äquivalent umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda) - 3 - 3 - 3(3 - \lambda)(-1) - 3(-1)(3 - \lambda) - (-1 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Also sind 1 und 2 die Eigenwerte von A (mit der algebraischen Vielfachheit 1 bzw. 2).

Nun bestimmen wir die zugehörigen Eigenräume. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 lautet

$$\text{Kern}(A - I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenraum zum Eigenwert 2 ergibt sich

$$\text{Kern}(A - 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit erhalten wir ein Fundamentalsystem von $(*)$

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die allgemeine Lösung von $(*)$ durch

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ 3e^t & e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \vec{c}, \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3,$$

gegeben ist.

b) Wir bezeichnen die Matrix des gegebenen Systems jeweils mit A .

i) Für das charakteristische Polynom ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 4) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Zum reellen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehört der Eigenraum

$$\text{Kern}(A - \lambda_1 I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

und damit erhalten wir als eine Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ die Funktion

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zum nicht-reellen Eigenwert $\lambda_2 = 1 + 2i$ gehört der Eigenraum

$$\text{Kern}(A - (1 + 2i)I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

so dass eine komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems $\vec{y}' = A\vec{y}$ gegeben ist durch

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos(2t) + i \sin(2t)) \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert dann die zwei reellen Lösungen

$$\vec{\phi}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\phi}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix},$$

und ein Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist bestimmt, nämlich $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3$. Die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ lautet somit $\vec{y} = c_1 \vec{\phi}_1 + c_2 \vec{\phi}_2 + c_3 \vec{\phi}_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ii) Das charakteristische Polynom ist diesmal

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Um diese Determinante zu berechnen, addieren wir zunächst die dritte zur vierten Zeile, subtrahieren dann die zweite von der vierten Spalte und entwickeln anschließend nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 + \lambda \\ -1 & 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 + \lambda \\ 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 1 + \lambda \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2(-2 - \lambda) - (1 + \lambda)^2) + \lambda^2 = \lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = \lambda(\lambda + 1)^3. \end{aligned}$$

Zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehört der Eigenraum

$$\text{Kern}(A - 0I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

und dies liefert als erste Fundamentallösung des gegebenen Systems

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert $\lambda = -1$ erhält man den Eigenraum

$$\text{Kern}(A + I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

der eindimensional ist und uns daher nur eine weitere Lösung gibt, nämlich

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen den einen gefundenen Eigenvektor zu einer Basis von

$$\text{Kern}(A + I)^2 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

und erhalten als dritte Lösung die Funktion

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t(A + I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + te^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Immer noch fehlt uns eine Lösung für das Fundamentalsystem, daher betrachten wir

$$\text{Kern}(A + I)^3 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine vierte und letzte Fundamentallösung ist somit

$$\vec{\phi}_4(t) = e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A + I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2(A + I)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

konkret ausgerechnet also

$$\vec{\phi}_4(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazit: Ein Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist durch $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3, \vec{\phi}_4$ gegeben.

Aufgabe 28 Zunächst ermitteln wir ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$. Offensichtlich sind 1, 3 die Eigenwerte von A . Wegen

$$\text{Kern}(A - I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ergibt sich eine erste Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\text{Kern}(A - 3I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist durch

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine zweite Fundamentallösung gegeben. Weiter gilt

$$(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infolgedessen lässt sich $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch (z.B.) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\text{Kern}(A - 3I)^2$ ergänzen. Dies liefert gemäß Vorlesung als eine weitere Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - 3I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$

$$\Phi(t) = \left(\begin{array}{c|c|c} \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \vec{\phi}_3(t) \\ \hline & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung \vec{y}_p der inhomogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$ lässt sich durch Variation der Konstanten bestimmen (vgl. S. 31, Skript). Danach ist \vec{y}_p gegeben durch

$$\vec{y}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \vec{b}(t) dt.$$

Die zu invertierende Matrix $\Phi(t)$ ist eine Blockmatrix der Form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit den regulären Matrizen $A = (e^t)$ und $B = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$. Die Inverse von solchen Matrizen kann man durch $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ berechnen. Mit der bekannten Formel für die Inversion einer 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

erhält man $B^{-1} = \frac{1}{e^{6t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$. Dies führt dann auf

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix},$$

woraus

$$\int \Phi(t)^{-1} \vec{b}(t) dt = \int \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 3te^{-3t} - t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int te^{-t} dt \\ \int 3te^{-3t} - t dt \\ \int 1 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} \\ -te^{-3t} - \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

folgt. Dies ergibt schließlich

$$\vec{y}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \vec{b}(t) dt = - \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{-t} + e^{-t} \\ te^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} t+1 \\ t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \\ -te^{3t} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \Phi(t) \vec{c} + \vec{y}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t+1 \\ t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \\ -te^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t - t - 1 \\ (c_2 + c_3 t + \frac{1}{2}t^2) e^{3t} - t - \frac{1}{3} \\ (c_3 + t) e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung besagt $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, also

$$\begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ c_2 - \frac{1}{3} \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad c_1 = 2, \quad c_2 = \frac{7}{3}, \quad c_3 = 0.$$

Somit ist

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - t - 1 \\ (\frac{7}{3} + \frac{1}{2}t^2) e^{3t} - t - \frac{1}{3} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 29 a) Bezeichnet man die Matrix des Systems mit A , so gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

woraus $A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$ und $A^{2k+1} = A^{2k}A = IA = A$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt. Damit ergibt sich für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l A^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} t^{2k} A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1} A^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} t^{2k} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1} A = \cosh(t)I + \sinh(t)A \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t) \\ c_1 \sinh(t) + c_2 \cosh(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Schreibt man $\vec{y} = (y_1, y_2)$, so besagt die gegebene Differentialgleichung gerade

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

woraus sich $y_1'' = y_2' = y_1$ ergibt, also $u'' - u = 0$, sofern $u := y_1$ gesetzt ist. Für das charakteristische Polynom dieser homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ergibt sich $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Da dieses die einfachen Nullstellen ± 1 besitzt, lautet die allgemeine Lösung: $y_1(t) = u(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-t}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Andererseits erfüllt y_2 die Gleichung $y_2'' = y_1' = y_2$, also $v'' - v = 0$ für $v := y_2$ mit der allgemeinen Lösung $y_2(t) = v(t) = b_1 e^t + b_2 e^{-t}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Bedingung $y_1' = y_2$ ergibt sich dann $b_1 = a_1$ und $b_2 = -a_2$, was auf die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

führt. Diese stimmt tatsächlich mit der in a) gefundenen Lösung überein. (Man muss sich nur an $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ sowie $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ erinnern und a_1, a_2 entsprechend anpassen.)

Aufgabe 30 a) Wir berechnen zunächst $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. Daher gilt $A^3 = A^2 A = 2AA = 2(2A) = 2^3 A$, und induktiv folgt $A^n = 2^{n-1} A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit lautet die Matrixexponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^{n-1} A = I + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} A - \frac{1}{2} A \\ &= \frac{1}{2} (2I + e^{2t} A - A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ 1 - e^{2t} & 1 + e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Wir schreiben $A = B + C$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = 42I, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass $BC = 42IC = 42CI = CB$ erfüllt ist. Daher gilt nach (1) in Abschnitt 3.5

$$e^{tA} = e^{t(B+C)} = e^{tB} e^{tC} \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

Zum einen ist

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42t)^n}{n!} I^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42t)^n}{n!} \right) I = e^{42t} I$$

und zum anderen

$$e^{tC} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^n = I + tC + \frac{t^2}{2} C^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^n = C^{n-3} C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } n \geq 3.$$

Insgesamt erhält man

$$e^{tA} = e^{tB} e^{tC} = e^{42t} \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Wir zeigen zuerst den Hinweis: Sei dazu $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Dann gilt

$$(SBS^{-1})^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB(S^{-1}S)BS^{-1} = SB^2S^{-1}$$

und induktiv folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(SBS^{-1})^k = SB^kS^{-1}.$$

Nach Definition der Matrixexponentialfunktion ergibt sich somit für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tSBS^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (SBS^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} SB^kS^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right) S^{-1} = Se^{tB}S^{-1}.$$

Wie in Aufgabe 27 a) gesehen, sind 1, 2 die Eigenwerte von A mit den zugehörigen Eigenräumen

$$\text{Kern}(A - I) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Kern}(A - 2I) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Insbesondere gibt es eine Basis des \mathbb{C}^3 aus Eigenvektoren von A , so dass A diagonalisierbar ist. Definiert man

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dann gilt (vgl. HM II)

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D.$$

Wegen

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

und $A = SDS^{-1}$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Hinweises

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tSDS^{-1}} = Se^{tD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 31 a) Ist die linke Feder um s_1 und die rechte Feder um s_2 ausgelenkt, dann ist die mittlere Feder um $s_2 - s_1$ ausgelenkt. Nach dem Hookeschen Gesetz ergibt sich für die Kraft, die auf den linken Wagen wirkt:

$$F_1 = \underbrace{-c_1 s_1}_{\substack{\text{Rückstellkraft} \\ \text{durch die linke Feder}}} + \underbrace{c_2 (s_2 - s_1)}_{\substack{\text{Rückstellkraft} \\ \text{durch die mittlere Feder}}}.$$

Entsprechend erhält man für die Kraft auf den rechten Wagen

$$F_2 = -c_1 s_2 - c_2 (s_2 - s_1).$$

Anwendung des Newtonschen Gesetzes führt dann auf

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -(c_1 + c_2)s_1 + c_2 s_2, \\ m\ddot{s}_2 &= c_2 s_1 - (c_1 + c_2)s_2. \end{aligned}$$

b) Die Matrix des Systems werde mit A bezeichnet. Da $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Für das charakteristische Polynom von A ergibt sich

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda - \frac{c_1 + c_2}{m})^2 - (\frac{c_2}{m})^2$$

mit den einfachen Nullstellen $-\frac{c_1}{m}$ und $-\frac{c_1 + 2c_2}{m}$ (wegen $c_2 > 0$ sind diese verschieden). Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 := -\frac{c_1}{m}$ lautet

$$\text{Kern}(A - \lambda_1 I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{m} & \frac{c_2}{m} \\ \frac{c_2}{m} & -\frac{c_2}{m} \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und zu $\lambda_2 := -\frac{c_1 + 2c_2}{m}$

$$\text{Kern}(A - \lambda_2 I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} \frac{c_2}{m} & \frac{c_2}{m} \\ \frac{c_2}{m} & \frac{c_2}{m} \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

erhält man somit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D.$$

Ist

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \\ \frac{1}{2}(s_1 - s_2) \end{pmatrix}$$

gesetzt, dann folgt

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{s}}_1 \\ \ddot{\tilde{s}}_2 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{pmatrix} = S^{-1}A \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = S^{-1}AS \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein System von zwei entkoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{s}}_1 &= \lambda_1 \tilde{s}_1 = -\frac{c_1}{m} \tilde{s}_1, \\ \ddot{\tilde{s}}_2 &= \lambda_2 \tilde{s}_2 = -\frac{c_1 + 2c_2}{m} \tilde{s}_2. \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von $\ddot{\tilde{s}}_1 + \frac{c_1}{m} \tilde{s}_1 = 0$ besitzt die einfachen Nullstellen $\pm i \sqrt{\frac{c_1}{m}}$ (man beachte $\frac{c_1}{m} > 0$). Infolgedessen lautet die allgemeine Lösung von $\ddot{\tilde{s}}_1 + \frac{c_1}{m} \tilde{s}_1 = 0$

$$\tilde{s}_1(t) = k_1 \cos(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t) + k_2 \sin(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Entsprechend erhält man

$$\tilde{s}_2(t) = k_3 \cos(\sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} t) + k_4 \sin(\sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} t), \quad k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$$

Die gesuchten Lösungen s_1, s_2 lassen sich nun aus

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_1 - \tilde{s}_2 \end{pmatrix}$$

berechnen, also

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t) + k_2 \sin(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t) + k_3 \cos(\sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} t) + k_4 \sin(\sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} t) \\ k_1 \cos(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t) + k_2 \sin(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t) - k_3 \cos(\sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} t) - k_4 \sin(\sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} t) \end{pmatrix}$$

für beliebige $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$.

Alternativ können wir das gegebene System 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung umschreiben. Dazu führen wir die beiden Hilfsfunktionen $h_1 := \dot{s}_1$ und $h_2 := \dot{s}_2$ ein und notieren zur Abkürzung $\alpha := \frac{c_1+c_2}{m}$, $\beta := \frac{c_2}{m}$. Das System

$$\begin{pmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

ist dann äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ h_1 \\ s_2 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix, welche wir mit B bezeichnen,

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\lambda & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Entw. Z1}}{=} -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & \beta & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \beta & -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Entw. S1 bzw. Z1}}{=} \lambda^2 \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2(\lambda^2 + \alpha) + \alpha(\lambda^2 + \alpha) - \beta^2 = \lambda^4 + 2\alpha\lambda^2 + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \\ &= (\lambda^2 + \alpha - \beta)(\lambda^2 + \alpha + \beta) \end{aligned}$$

besitzt die einfachen Nullstellen $\pm i\sqrt{\alpha - \beta}$ und $\pm i\sqrt{\alpha + \beta}$ (man beachte $\alpha - \beta, \alpha + \beta > 0$). Ein Eigenvektor zum Eigenwert $i\sqrt{\alpha - \beta}$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \\ 1 \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir eine (nicht-reelle) Lösung von (*)

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{\alpha - \beta}t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \\ 1 \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \end{pmatrix} &= (\cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) + i\sin(\sqrt{\alpha - \beta}t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \\ 1 \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) + i\sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) - \sqrt{\alpha - \beta} \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) + i\sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ i\sqrt{\alpha - \beta} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) - \sqrt{\alpha - \beta} \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil erhalten wir zwei (reelle) Fundamentallösungen von (*)

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ -\sqrt{\alpha - \beta} \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ -\sqrt{\alpha - \beta} \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ \sqrt{\alpha - \beta} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) \\ \sqrt{\alpha - \beta} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $i\sqrt{\alpha + \beta}$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha + \beta} \\ -1 \\ -i\sqrt{\alpha + \beta} \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{\alpha + \beta}t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha + \beta} \\ -1 \\ -i\sqrt{\alpha + \beta} \end{pmatrix} &= (\cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) + i\sin(\sqrt{\alpha + \beta}t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha + \beta} \\ -1 \\ -i\sqrt{\alpha + \beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) + i\sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ i\sqrt{\alpha + \beta} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) - \sqrt{\alpha + \beta} \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ -\cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) - i\sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ -i\sqrt{\alpha + \beta} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) + \sqrt{\alpha + \beta} \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt, erhalten wir zwei weitere (reelle) Fundamentallösungen von (*)

$$\vec{\phi}_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ -\sqrt{\alpha + \beta} \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ -\cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ \sqrt{\alpha + \beta} \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_4(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ \sqrt{\alpha + \beta} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ -\sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ -\sqrt{\alpha + \beta} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) \end{pmatrix}.$$

Zusammen folgt, dass die allgemeine Lösung von (*) durch

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ h_1(t) \\ s_2(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = k_1 \vec{\phi}_1(t) + k_2 \vec{\phi}_2(t) + k_3 \vec{\phi}_3(t) + k_4 \vec{\phi}_4(t) \quad (k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R})$$

gegeben ist. Betrachtet man hier nur die erste und dritte Komponente, so hat man

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) + k_2 \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) + k_3 \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) + k_4 \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \\ k_1 \cos(\sqrt{\alpha - \beta}t) + k_2 \sin(\sqrt{\alpha - \beta}t) - k_3 \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t) - k_4 \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t) \end{pmatrix}$$

für beliebige $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$. Setzt man hierin die Werte von α, β ein, dann erhält man das Ergebnis von zuvor.