Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 32 Wir wiederholen ein paar Details der Charakteristikberechnung:
In der Vorlesung haben wir Gleichungen des Typs

$$\vec{a}(\vec{x}, u) \cdot \nabla u = b(\vec{x}, u), \quad \vec{x} \in D, \tag{1}$$

in $D \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet. Hier sind $\vec{a} : D \times J \to \mathbb{R}^n$ und $b : D \times J \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Unter diesen Typ fällt auch die Gleichung der Aufgabe 32: Schreibt man nämlich die Koordinaten $\vec{x}$ aus zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$, dann können wir $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $\vec{a}(\vec{x}, u) = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b(\vec{x}, u) = 0$ wählen. Die Charakteristiken, die wir

$$\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$$

notiert haben, bedeuten dann das folgende: Die Grundcharakteristik $\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \end{pmatrix}$ ist ein spezieller Weg im Ort-Zeit-Raum $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ (s ist ein reeller Parameter), von dem man hofft, auf ihm die Lösung u der Gleichung (1) zu kennen: Nämlich soll der Wert $u(\vec{k}(s))$ gegeben sein durch den zweiten Teil der Charakteristik, also durch

$$u(\vec{k}(s)) = w(s).$$

Die Bestimmung der Charakteristiken erfolgt durch Lösen des sog. charakteristischen Systems

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \\ w'(s) &= b(\vec{k}(s), w(s)) \end{aligned} \tag{2}$$

(vgl. Vorlesung), was wir nun konkret mit der vorgegebenen Gleichung tun wollen:
Das Differentialgleichungssystem (2) lautet hier

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \begin{pmatrix} w(s) \\ 1 \end{pmatrix} \\ w'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile lösen wir sofort zu $w(s) = \text{const}$, also etwa $w(s) = w(0)$.
Die erste Zeile lösen wir dann konsequenterweise zu

$$\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} w(0) \\ 1 \end{pmatrix} s + \vec{k}(0).$$

Nun können wir noch den Startpunkt $\vec{k}(0)$ der Charakteristik wählen: Wir tun dies der Einfachheit halber durch $\vec{k}(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ mit einem reellen Parameter ξ, weil auf $\Gamma = \{\begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} : \xi \in \mathbb{R}\}$ die Anfangswerte vorgegeben sind. Die Anfangsbedingung ergibt $u(\xi, 0) = w(0) = f(\xi)$, also

$$\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} f(\xi) \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Lösungskandidaten u erhält man also die Information

$$u(x,t) = f(\xi),$$

falls $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}(s) = \begin{pmatrix} f(\xi)s + \xi \\ s \end{pmatrix}$ für ein $s \in \mathbb{R}$ gilt, anders gesagt, falls $x = f(\xi)t + \xi$ (die zweite Zeile ergibt $t = s$, was man in die erste Zeile einsetzt).

a) Wie eben erwähnt, ist $u(x,t) = f(\xi)$ für

$$x = f(\xi)t + \xi. \tag{3}$$

Die Bedingung (3) ist für jedes fest gewählte $t \geqslant 0$ und jedes fest gewählte $x \in \mathbb{R}$ eindeutig nach ξ auflösbar, was wir jetzt nachweisen.

Kommentar: Die nachfolgende Rechnung hat eine einfache geometrische Interpretation: Verschiedene Grundcharakteristiken schneiden sich nicht!

1. Fall: $x \leqslant 0$.
Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass (3) erfüllt ist. Wegen $f(\xi) \geqslant 0$ gilt $f(\xi)t \geqslant 0$ für jedes $t \geqslant 0$. Damit folgt $\xi = x - f(\xi)t \leqslant 0$, so dass $f(\xi) = 0$ ist. Insbesondere lautet (3) dann $x = \xi$. Also ist ξ eindeutig festgelegt.
Andererseits löst die Wahl $\xi = x$ natürlich die Gleichung (3).

2. Fall: $x > 0$.
Falls ξ die Gleichung (3) löst, muss $\xi > 0$ gelten, denn sonst wäre $\xi \leqslant 0$ und $x = 0 \cdot t + \xi \leqslant 0$. Betrachten wir (3) als Funktion $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\xi \mapsto x = f(\xi)t + \xi$. Dann ist g umkehrbar, denn g ist wegen

$$g'(\xi) = e^{-\frac{1}{\xi}} \cdot \frac{t}{\xi^2} + 1 \geqslant 1 > 0 \qquad \text{für alle } \xi \in (0,\infty)$$

auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend und es gilt $g(0) = 0$. Deshalb existiert genau ein $\xi > 0$ so, dass (3) gilt.

Kommentar: Die obige Rechnung hat gezeigt, dass das obige u wohldefiniert ist. Dass u tatsächlich das ursprüngliche Problem löst, folgt dann aus Abschnitt 4.4 der Vorlesung oder lässt sich alternativ direkt nachprüfen: Es gilt

$$\partial_x u(x,t) = \partial_x f(\tilde{g}(x)),$$

wobei $\tilde{g}$ die Umkehrfunktion vom obigen g ist. Wende nun den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion aus HM II an. Man berechnet außerdem

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t f(\xi(t)) \cdot \xi'(t),$$

indem man $h(\xi) = \frac{x-\xi}{f(\xi)}$ nach ξ differenziert und dann daraus die Ableitung der Umkehrfunktion von h, also die Ableitung von $\xi(t)$, bestimmt.

b) Nehmen wir an, u ist eine Lösung der Gleichung (1) und $\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$ ist eine Lösung von (2). Dann gilt nach der Kettenregel

$$(u \circ \vec{k})'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{k}'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \overset{(1)}{=} 0. \tag{4}$$

Also ist hier u auf Grundcharakteristiken konstant.
Nun nehmen wir zusätzlich an, dass f stetig differenzierbar ist und nicht monoton wachsend. In diesem Fall existieren also $x_0 < x_1$ mit $f(x_0) > f(x_1)$. Die dazugehörigen Grundcharakteristiken

$$\vec{k}_0(s) = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{k}_1(s) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schneiden sich dann, denn die Schnittgleichung

$$\vec{k}_0(s) = \vec{k}_1(s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0)s + x_0 = f(x_1)s + x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(f(x_0) - f(x_1)\big)s = x_1 - x_0$$

hat eine Lösung $s > 0$.
Damit kann eine Lösung u von (1) höchstens bis zu dem Zeitpunkt $t = s = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)}$ existieren, da sonst ein Widerspruch zur Konstanz von u auf Grundcharakteristiken

$$u(\vec{k}_0(s)) = u(\vec{k}_0(0)) = f(x_0) \neq f(x_1) = u(\vec{k}_1(0)) = u(\vec{k}_1(s))$$

(vgl. (4)) entsteht.

Aufgabe 33 Wir bringen die Gleichung in die Form $\vec{a}(x,t,u) \cdot \nabla u = b(x,t,u)$ (das ist (1) mit $\vec{x} = (x,t)$), also gilt hier $\vec{a}(x,t,u) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b(x,t,u) = 0$. Wir bestimmen die Charakteristiken $\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$, wobei $\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix}$. Das charakteristische System (2) lautet hier

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \begin{pmatrix} k_1'(s) \\ k_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_2(s)) \\ 1 \end{pmatrix} \\ w'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten $k_2(s) = s + c_2$ und damit $k_1'(s) = \cos(s + c_2)$, woraus $k_1(s) = \sin(s + c_2) + c_1$ folgt. Außerdem erhalten wir wieder $w(s) = \text{const} =: w_0$.
Für jede Wahl von $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir also eine Grundcharakteristik $s \mapsto \begin{pmatrix} \sin(s + c_2) + c_1 \\ s + c_2 \end{pmatrix}$; wir bezeichnen diese mit $\vec{k}^{(c_1,c_2)}$.
Fazit: Für jede Wahl von $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ und w_0 erhalten wir eine Charakteristik $s \mapsto \begin{pmatrix} \vec{k}^{(c_1,c_2)}(s) \\ w_0 \end{pmatrix}$.
Wir stellen fest, dass $\vec{k}^{(c_1,c_2)}(s - c_2) = \begin{pmatrix} \sin(s) + c_1 \\ s \end{pmatrix} = \vec{k}^{(c_1,0)}(s)$ gilt, d.h. $\vec{k}^{(c_1,c_2)}$ und $\vec{k}^{(c_1,0)}$ sind nur Umparametrisierungen der gleichen Kurve und es genügt eine davon zu untersuchen. Wir wählen daher im folgenden stets $c_2 = 0$ und statt $\vec{k}^{(c_1,0)}$ schreiben wir $\vec{k}^{(c_1)}$.
Wir untersuchen nun Randpunkte $\vec{r} = (x,t) \in R$ und unterscheiden dabei drei Fälle:
1. Fall: $r = (x, 0)$ mit (festem) $x \in (0, 2\pi)$ („unterer Rand")
Wir überlegen uns, welche Grundcharakteristik durch den Punkt $(x, 0)$ verläuft: Aus $\vec{k}^{(c_1)}(s) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $\sin(s) + c_1 = x$, $s = 0$, also $c_1 = x$. D.h. die Grundcharakteristik $\vec{k}^{(x)}$ verläuft bei $s = 0$ durch $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.
Für $h > 0$ gilt $\vec{k}^{(x)}(h) = \begin{pmatrix} \sin(h) + x \\ h \end{pmatrix}$. Für genügend kleines $h > 0$ ist $\sin(h) + x \in (0, 2\pi)$, also $\vec{k}^{(c_1)}(h) \in Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft nach Q hinein.

2. Fall: $r = (0, t)$ mit (festem) $t \in [0, \infty)$ („linker Rand")
Wir überlegen uns wieder, welche Grundcharakteristik durch den Punkt $(0, t)$ verläuft: Aus $\vec{k}^{(c_1)}(s) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ folgt $\sin(s) + c_1 = 0$, $s = t$, also $c_1 = -\sin(t)$. D.h. die Grundcharakteristik $\vec{k}^{(-\sin(t))}$ verläuft bei $s = t$ durch $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$.
Für $h > 0$ gilt $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t + h) = \begin{pmatrix} \sin(t + h) - \sin(t) \\ t + h \end{pmatrix}$.
Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (t, t + h)$ mit $\sin(t + h) - \sin(t) = h\cos(\xi)$. Mit genügend kleinem $h > 0$ liegt ξ nahe bei t (es gilt aber stets $\xi > t$). Es gilt dann also

$\sin(t+h) - \sin(t) > 0$ falls $t \in P := [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi) \cup [\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi) \cup \ldots$ und

$\sin(t+h) - \sin(t) < 0$ falls $t \in N := [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup [\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi) \cup [\frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi) \cup \ldots$.

Für $t \in P$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt also $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \in Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall nach Q hinein.

Für $t \in N$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt analog $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \notin Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall aus Q heraus.

Es gilt $[0, \infty) = P \cup N$, d.h. wir haben alle möglichen Fälle untersucht.

3. Fall: $r = (2\pi, t)$ mit (festem) $t \in [0, \infty)$ („rechter Rand“)

Wir überlegen uns wieder, welche Grundcharakteristik durch den Punkt $(2\pi, t)$ verläuft: Aus $\vec{k}^{(c_1)}(s) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2\pi \\ t \end{pmatrix}$ folgt $\sin(s) + c_1 = 2\pi$, $s = t$, also $c_1 = 2\pi - \sin(t)$. D.h. die Grundcharakteristik $\vec{k}^{(2\pi - \sin(t))}$ verläuft bei $s = t$ durch $\begin{pmatrix} 2\pi \\ t \end{pmatrix}$.

Für $h > 0$ gilt $\vec{k}^{(2\pi-\sin(t))}(t+h) = \begin{pmatrix} 2\pi + \sin(t+h) - \sin(t) \\ t+h \end{pmatrix}$.

Wir verwenden die Vorzeichenüberlegungen zu $\sin(t+h) - \sin(t)$ von oben und erhalten:

Für $t \in N$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \in Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall nach Q hinein.

Für $t \in P$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \notin Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall aus Q heraus.

Das waren wieder alle möglichen Fälle.

Zusammenfassung: Für

$$r \in R_{\text{rein}} := (0, 2\pi) \times \{0\} \,\cup\, \{0\} \times P \,\cup\, \{2\pi\} \times N$$

läuft die Grundcharakteristik nach Q hinein, für $r \in R \setminus R_{\text{rein}}$ läuft sie aus Q heraus.

Aufgabe 34 Wir bringen die Gleichung in die Form $\vec{a}(x,t,u) \cdot \nabla u = b(x,t,u)$, also gilt hier $\vec{a}(x,t,u) = \begin{pmatrix} tu \\ 1 \end{pmatrix}$, $b(x,t,u) = u$.

Anfangswerte sind vorgegeben auf $\Gamma := \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$ und es gilt dort $u(\xi, 0) = -\xi =: f(\xi)$.

Das charakteristische System lautet:

$\vec{k}'(s) = \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) = \vec{a}(k_1(s), k_2(s), w(s)) = \begin{pmatrix} k_2(s) \cdot w(s) \\ 1 \end{pmatrix}$

$w'(s) = b(\vec{k}(s), w(s)) = b(k_1(s), k_2(s), w(s)) = w(s)$.

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ lösen wir das charakteristische System mit folgenden Anfangswerten (vgl. Abschnitt 4.4, Skriptum): $\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\xi, 0) \end{pmatrix}$.

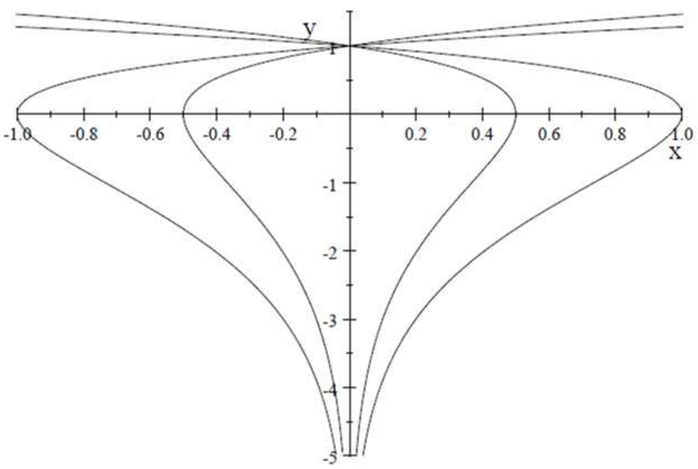
Also $k_1(0) = \xi$, $k_2(0) = 0$, $w(0) = f(\xi, 0) = -\xi$.

Somit folgt $k_2(s) = s$ und $w(s) = -\xi e^s$, was auf $k_1'(s) = k_2(s)w(s) = s \cdot (-\xi)e^s$, also $k_1(s) = -\xi(s-1)e^s$ (wegen $k_1(0) = \xi$) führt.

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ erhalten wie so eine Charakteristik. Diese bezeichnen wir mit $\begin{pmatrix} \vec{k}(\cdot, \vec{\xi}) \\ w(\cdot, \vec{\xi}) \end{pmatrix}$. (Es gilt also $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} -\xi(s-1)e^s \\ s \end{pmatrix}$ und $w(s, \vec{\xi}) = -\xi e^s$ für alle $s \in \mathbb{R}$.)

Zur Veranschaulichung zeichnen wir einige Grundcharakteristiken (nämlich für $\xi = 1$, $\xi = 1/2$,

$\xi = 0$, $\xi = -1/2$ und $\xi = -1$) in den Argumentraum:



(Das ist natürlich jeweils der an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelte Funktionsgraph der Funktion $s \mapsto -\xi(s-1)e^s$.) Wir beobachten dabei (und rechnen leicht nach), dass gilt:

- Jede Grundcharakteristik geht durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Nämlich jeweils bei $s = 1$: $\vec{k}(1, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.)
- Durch $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ verläuft keine Grundcharakteristik.
- Durch alle übrigen Punkte (x, t) (also alle Punkte mit $t \neq 1$) geht genau eine Grundcharakteristik.

  (Das zeigen wir so: Sei (x, t) mit $t \neq 1$ gegeben. Wir suchen $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ so, dass es ein s gibt mit $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$. Das ist gleichbedeutend mit

  $$\begin{cases} k_1(s, \vec{\xi}) = -\xi(s-1)e^s = x \\ k_2(s, \vec{\xi}) = s = t \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} s = t \\ \xi = -\frac{x}{t-1}e^{-t} \end{cases}$$

  (Das bedeutet: Die Grundcharakteristik $\vec{k}(\cdot, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix})$ (und nur diese) verläuft durch den Punkt (x, t) (und zwar bei $s = t$).)

Einen „Kandidaten“ für den Wert der Lösung an der Stelle (x, t) mit $t \neq 1$ erhalten wir jetzt durch Auswerten von $w(\cdot, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix})$ bei $s = t$:
$u(x, t) = u(\vec{k}(t, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix})) = w(t, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{x}{t-1}e^{-t}e^t = \frac{x}{t-1}$.
Durch Einsetzen prüft man leicht nach, dass $u(x, t) = \frac{x}{t-1}$ tatsächlich die partielle Differentialgleichung samt Anfangsbedingung bis zum Zeitpunkt $t = 1$ löst (genauer: auf $\mathbb{R} \times (-\infty, 1)$). Über den Zeitpunkt $t = 1$ hinaus lässt sich die Lösung nicht fortsetzen.

Aufgabe 35 Sei $A = (a_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ eine $n \times n$-Matrix mit $A^T A = I$ und $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.
Definiere $\vec{g} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, also $g_k(\vec{x}) = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l$ für jedes $k = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x}) = a_{kj} \qquad \text{für } j, k = 1, \ldots, n.$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(g(\vec{x})\big)\ \underbrace{\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x})}_{=a_{kj}}$$

und

$$\frac{\partial^2(f\circ g)}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ g\right)(\vec{x})\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\,\partial x_k}(\underbrace{\vec{g}(\vec{x})}_{=A\vec{x}})\ \underbrace{\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x)}_{=a_{lj}}\ a_{kj}\,.$$

Dies führt auf

$$\Delta(f\circ A)(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2(f\circ A)}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\,\partial x_k}(A\vec{x})\,a_{lj}\,a_{kj} = \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\,a_{kj}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_l\,\partial x_k}(A\vec{x})\,.$$

Die innere Summe entspricht dem Skalarprodukt der l-ten mit der k-ten Zeile der Matrix A. Da A orthogonal ist, verschwindet dieses Skalarprodukt, außer wenn $l=k$ ist. In diesem Fall ist es $=1$. Somit folgt

$$\Delta(f\circ A)(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_k}(A\vec{x}) = (\Delta f)(A\vec{x})\,.$$

Bemerkung: Wir haben eben nachgerechnet: Ist $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ und $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, dann löst auch die Funktion $v\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\vec{x}\mapsto u(A\vec{x})$ die Laplace-Gleichung. Anschaulich bedeutet diese Aussage, dass auch um den Ursprung gedrehte oder am Ursprung gespiegelte Lösungen der Laplace-Gleichung diese ebenfalls lösen.

Aufgabe 36 Für $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ setze

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}}\,.$$

Offenbar ist u auf $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ zweimal stetig differenzierbar. Für jedes $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ gilt

$$\nabla u(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac12(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-3/2}\cdot(2x_1)\\ -\frac12(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-3/2}\cdot(2x_2)\\ -\frac12(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-3/2}\cdot(2x_3)\end{pmatrix} = -\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^3}\,\vec{x}\,.$$

Anwenden der (eindimensionalen) Produkt- und Kettenregel ergibt somit

$$\begin{aligned}\Delta u(\vec{x}) &= \nabla\cdot\nabla u(\vec{x}) = -\nabla\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = -\sum_{k=1}^{3}\partial_k\frac{x_k}{\|\vec{x}\|^3} = -\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|^3} + x_k(-3)\|\vec{x}\|^{-4}\partial_k(\|\vec{x}\|)\right)\\ &= -\frac{3}{\|\vec{x}\|^3} - \sum_{k=1}^{3} x_k(-3)\|\vec{x}\|^{-4}\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|} = -\frac{3}{\|\vec{x}\|^3} + 3\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^5} = -\frac{3}{\|\vec{x}\|^3} + \frac{3}{\|\vec{x}\|^5}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}x_k^2}_{=\|\vec{x}\|^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Fazit: u ist harmonisch.

Alternativ: Aus der HM II wissen wir, wie der Laplaceoperator auf eine radialsymmetrische Funktion wirkt. Ist $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ durch $f(t) := \frac{1}{t}$ definiert, so lässt sich

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} = f(\|\vec{x}\|) \qquad \text{für alle } \vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$$

schreiben. Insbesondere ist f auf $(0,\infty)$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-1}{t^2}$ und $f''(t) = \frac{2}{t^3}$. Mit dem Resultat 6) aus Kapitel 29.2 (HM II, Zusammenfassung Woche 6, SS 2010) folgt

$$(\Delta u)(\vec{x}) = f''(\|\vec{x}\|) + \frac{3-1}{\|\vec{x}\|}\,f'(\|\vec{x}\|) = \frac{2}{\|\vec{x}\|^3} + \frac{2}{\|\vec{x}\|}\,\frac{-1}{\|\vec{x}\|^2} = 0 \qquad \text{für alle } \vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}\,.$$

Aufgabe 37 **a)** Es sei u eine harmonische Funktion. Wir suchen eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Dabei setzen wir $v = \operatorname{Im} f$, so dass $f = u + iv$ gilt.
Laut Satz 1 in 1.3 (KAI, SS 2010) ist f holomorph genau dann, wenn u und v C^1-Funktionen sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, also $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$. Die harmonische Funktion u ist per definitionem eine C^2-Funktion. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ fest gewählt. Wegen der Bedingung $\partial_y v = \partial_x u$ setzen wir

$$v(x,y) := \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,\tilde{y})\, d\tilde{y} + c(x),$$

wobei die rechte Seite eine Stammfunktion in y bei festgehaltenem x sein soll. So eine Stammfunktion existiert immer, zumindest lokal!
Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass v eine C^1-Funktion ist. Wir prüfen nun, dass auch die zweite Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\partial_x v = -\partial_y u$ erfüllt ist. Nach einem Satz in 4.1 gilt

$$\begin{aligned}\partial_x v(x,y) &= \int_{y_0}^{y} \partial_x^2 u(x,\tilde{y})\, d\tilde{y} + c'(x) = -\int_{y_0}^{y} \partial_y^2 u(x,\tilde{y})\, d\tilde{y} + c'(x) = -\big[\partial_y u(x,\tilde{y})\big]_{\tilde{y}=y_0}^{\tilde{y}=y} + c'(x)\\ &= -\partial_y u(x,y) + \partial_y u(x,y_0) + c'(x) = -\partial_y u(x,y),\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung aus der Tatsache folgt, dass u harmonisch ist. Dabei haben wir $c(x) := -\int_{x_0}^{x} \partial_y u(\tilde{x}, y_0)\, d\tilde{x}$ gewählt, damit $c'(x) = -\partial_y u(x, y_0)$ gilt.
Nach besagtem Resultat aus 1.3 (KAI) ist $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir $u_y(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, 2y$ und damit $v_x(x,y) = -u_y(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Es folgt

$$v(x,y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx = \frac{-y}{x^2+y^2} + c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c. Aus der Bedingung $v_y = u_x$ schließen wir

$$v_y(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(y) \overset{!}{=} u_x(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad c'(y) = 0.$$

Wir wählen $c(y) = 0$ (jede andere Konstante hätte es auch getan) und erhalten für $(x,y) \neq 0$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{1}{x+iy}.$$

Insbesondere ist u als Realteil der holomorphen Funktion f nach Beispiel 2) in 5.1 harmonisch.

c) Annahme: Es gibt eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f so, dass $u = \operatorname{Re} f$ gilt. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$)

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = u_x(x,y) - iu_y(x,y). \tag{$*$}$$

Für $u(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \neq (0,0)$, erhält man

$$u_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$$

und analog

$$u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}.$$

Dies ist unmöglich, weil $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfunktion besitzt. Deshalb ist die anfängliche Annahme falsch und es existiert keine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f mit $u = \operatorname{Re} f$.
[Wäre f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $f'(z) = 1/z$ für alle $z \neq 0$, dann würde für die durch $\gamma(t) = e^{it}$ gegebene Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gelten $0 = f(1) - f(1) = \oint_\gamma f'(z)\, dz = \oint_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$. Widerspruch!]