Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2010/2011
27.01.2011

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

8. Übungsblatt

Aufgabe 38

Für $n = 2, 3$ setze $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Bestimmen Sie eine Greensche Funktion für $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

Hinweis: Spiegeln Sie einen gegebenen Punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ an der Gerade bzw. Ebene $\partial\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, d.h. betrachten Sie $\vec{y}^{\,*} = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n)$.

Aufgabe 39

Für $x \in [0, 1]$ definiere

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leqslant x < 1/2, \\ 1 - x & \text{falls } 1/2 \leqslant x \leq 1. \end{cases}$$

Lösen Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_{xx} u(t, x) \quad \text{in } (0, \infty) \times (0, 1), \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u(0, x) &= f(x) \quad \text{für } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Hinweis: Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ und

$$f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)\,,$$

dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x)\, dx\,.$$

Aufgabe 40

Bestimmen Sie für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_{xx} u(t, x) \quad \text{in } (0, \infty) \times (0, 1), \\ \partial_x u(t, 0) &= 0 = \partial_x u(t, 1) \quad \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

alle separierte-Variablen-Lösungen, d.h. alle Lösungen von der Gestalt $u(t, x) = v(t)w(x)$.

Aufgabe 41

Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die beschränkte Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \partial_{xx} u(t,x) \quad \text{für } t>0,\ x \in (0,\infty), \\ u(t,0) &= 0 \quad \text{für } t>0, \\ u(0,x) &= f(x) \quad \text{für } x \in [0,\infty) \end{aligned}$$

gegeben ist durch

$$u(t,x) = \int_0^\infty K(t,x,y) f(y)\, dy$$

mit $K(t,x,y) := G(t,x-y) - G(t,x+y)$ für alle $t>0, x,y \in \mathbb{R}$, wobei G den Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Hinweis: Setzen Sie f zu einer ungeraden Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort und lösen Sie das Anfangswertproblem für das erweiterte f.

Aufgabe 42

Führen Sie einen Separationsansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ für das folgende Problem durch:

$$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi),$$

$$\begin{aligned} u(t,\pi) = u(t,-\pi),\ \partial_x u(t,\pi) = \partial_x u(t,-\pi) \quad &\text{für } t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x) \quad &\text{für } x \in [-\pi,\pi], \end{aligned}$$

wobei $f,g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben sind (Wellengleichung mit periodischen Randbedingungen).

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass man eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Fourierreihe entwickeln kann: Definiere

$$\begin{aligned} a_k(h) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(kx)\, dx \quad (k \in \mathbb{N}_0), \\ b_k(h) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(kx)\, dx \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Dann sind $\sum_{k=0}^\infty |a_k(h)| < \infty$, $\sum_{k=1}^\infty |b_k(h)| < \infty$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^\infty \big(a_k(h)\cos(kx) + b_k(h)\sin(kx)\big).$$

Viel Erfolg bei der Klausur und alles Gute für Ihr weiteres Studium!

Die **Prüfung** zur HM III findet am Montag, den 28.02.2011, 11:00 - 13:00 Uhr statt.

!!! Anmeldeschluss ist Freitag, der 11.02.2011 !!!

Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.