Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 38 Wir wiederholen: Sei $n = 2, 3$ und $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Bezeichnet Γ die Grundlösung der Laplacegleichung (vgl. Skript 5.4), so gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$.

$$\Delta_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x} - \vec{y}) = 0. \tag{1}$$

Gemäß dem Hinweis schauen wir uns an, welche Eigenschaften die Funktion $\vec{x} \mapsto \Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*)$ hat. (Mit "Eigenschaften" haben wir den Blick auf Skript 5.6 gerichtet.)
Für jedes $\vec{x} \in \partial\Omega$ gilt wegen $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(\vec{x} - \vec{y})^*\| = \|\vec{x}^* - \vec{y}^*\| = \|\vec{x} - \vec{y}^*\|$

$$\Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*) = \Gamma(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2}$$

Außerdem gilt für alle $j = 1, \ldots, n$ und alle $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$(\partial_j\Gamma(\cdot - \vec{y}^*))(\vec{x}) = \partial_j\Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*) \qquad \text{und} \qquad (\partial_j^2\Gamma(\cdot - \vec{y}^*))(\vec{x}) = \partial_j^2\Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*).$$

Damit folgt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$(\Delta\Gamma(\cdot - \vec{y}^*))(\vec{x}) = \Delta_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*) \overset{(1)}{=} 0. \tag{3}$$

Wir definieren für $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$G(\vec{x}, \vec{y}) := \Gamma(\vec{x} - \vec{y}) - \Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*)$$

und zeigen, dass G eine Greensche Funktion für Ω ist. Offenbar ist G symmetrisch (d.h. $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$). Außerdem gilt wegen (2)

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x} - \vec{y}) - \Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*) = 0 \qquad (\vec{x} \in \partial\Omega,\ \vec{y} \in \Omega)$$

und wegen (3) (beachte, dass $\vec{y}^* \notin \Omega$, falls $\vec{y} \in \Omega$, und daher $\vec{x} \neq \vec{y}^*$, falls auch $\vec{x} \in \Omega$)

$$\Delta_{\vec{x}}\big(G(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x} - \vec{y})\big) = -\Delta_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x} - \vec{y}^*) = 0 \qquad (\vec{x}, \vec{y} \in \Omega).$$

Damit ist G eine Greensche Funktion für Ω.

Aufgabe 39 Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \partial_{xx}u(t,x) \quad \text{für } t > 0,\ x \in (0,1), \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u(0,x) &= f(x) \quad \text{für } x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus der Vorlesung 6.5 ist bekannt, dass die Lösung von (4) gegeben ist durch

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x) \qquad \text{für } x \in [0,1], t > 0, \tag{5}$$

sofern f in der Form $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$ für gewisse $a_k \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Dabei sollen die Koeffizienten (a_k) so sein, dass man den Reihen einen Sinn geben kann. Dies ist z.B. für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ der Fall. Wir wollen den Hinweis verwenden und berechnen die Koeffizienten a_k zu dem gegebenen f mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}
a_k &= 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx = 2\int_0^{1/2} x\sin(k\pi x)\,dx + 2\int_{1/2}^1 (1-x)\sin(k\pi x)\,dx \\
&= -2\,\frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx - 2\,\frac{(1-x)\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{1/2}^1 - 2\int_{1/2}^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx \\
&= -\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi} + \frac{2}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_0^{1/2} + \frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$. Da der Ausdruck $\sin(\frac{k\pi}{2})$ für $k \in \mathbb{N}$ zyklisch die Werte $1, 0, -1, 0$ annimmt, ergibt sich nach (5) als Lösung

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin((2n-1)\pi x) \qquad \text{für } x \in [0,1], t \geqslant 0.$$

Beweis des Hinweises: *1. Schritt:* Wir zeigen, dass

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\,\delta_{km} := \frac{1}{2}\cdot\begin{cases} 1 & \text{falls } k = m \\ 0 & \text{falls } k \neq m \end{cases}$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Seien $k, m \in \mathbb{N}$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx \;=\; \underbrace{-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\sin(m\pi x)\Big|_0^1}_{=0} + \frac{m}{k}\int_0^1 \cos(k\pi x)\cos(m\pi x)\,dx. \qquad (6)$$

Fall 1. Es gelte $m \neq k$. Erneute partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx &= \frac{m}{k}\int_0^1 \cos(k\pi x)\cos(m\pi x)\,dx \\
&= \frac{m}{k}\left(\underbrace{\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\cos(m\pi x)\Big|_0^1}_{=0} + \frac{m}{k}\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx\right) \\
&= \frac{m^2}{k^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx,
\end{aligned}$$

also

$$\left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right)\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = 0.$$

Wegen $m \neq k$ und $k, m > 0$ gilt $1 - \frac{m^2}{k^2} \neq 0$, also folgt $\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = 0$.

Fall 2. Es gelte $k = m$. Aus (6) ergibt sich mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \int_0^1 \cos^2(k\pi x)\,dx = \int_0^1 \big(1 - \sin^2(k\pi x)\big)\,dx = 1 - \int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx,$$

woraus durch Umstellen $\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$ folgt.

2. Schritt: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$. Definiere die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x).$$

Wir zeigen, dass dann $a_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ definiere $f_N(x) := \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(k\pi x)$. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |a_k \sin(k\pi x)|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$$

konvergiert die Funktionenfolge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f (vgl. Satz 3, Ergänzungen zur HM I, WS 09/10, Woche 9). Daher ist das Vertauschen von Limes und Integration in $(*)$ erlaubt (vgl. Satz II, Ergänzungen zur HM I, WS 09/10, Woche 12). Deshalb ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx &= 2\int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)\,dx \\ &\overset{(*)}{=} 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)\,dx}_{=\frac{1}{2}\delta_{km}} \\ &= a_k\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 40 Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \partial_{xx}u(t,x) \quad \text{für } t>0,\ x\in(0,1), \\ \partial_x u(t,0) &= 0 = \partial_x u(t,1) \quad \text{für } t>0 \end{aligned}$$

und machen den Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$, $t>0$, $x\in(0,1)$. Wie im Fall von homogenen Dirichletrandbedingungen (vgl. Skript 6.5) folgt, dass ein $\lambda\in\mathbb{R}$ so existiert, dass gilt

$$\begin{aligned} (a) \qquad & v'(t) = \lambda v(t) \\ (b) \qquad & w''(x) = \lambda w(x). \end{aligned}$$

Die Lösung von (a) ist $v(t) = v(0)e^{\lambda t}$, die allgemeine Lösung von (b) lautet $w(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Bei dem Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ ergibt sich für die Randbedingungen $\partial_x u(t,0) = 0 = \partial_x u(t,1)$: $v(t)w'(0) = 0 = v(t)w'(1)$, im nichttrivialen Fall $v\neq 0$ also $w'(0) = 0 = w'(1)$, d.h.

$$\begin{aligned} (c) \qquad & \sqrt{\lambda}\alpha - \sqrt{\lambda}\beta = 0 \\ (d) \qquad & \sqrt{\lambda}\alpha e^{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\beta e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man (c) in (d) ein, so ergibt sich die Bedingung

$$\sqrt{\lambda}\alpha(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

Wir gehen weiterhin von dem nichttrivialen Fall $\lambda,\alpha\neq 0$ aus. Dann folgt

$$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \iff e^{2\sqrt{\lambda}} = 1 \iff \exists\, k\in\mathbb{Z} : 2\sqrt{\lambda} = 2\pi i k \iff \exists\, k\in\mathbb{Z} : \sqrt{\lambda} = k\pi i.$$

Somit ist w von der Gestalt $w(x) = \alpha e^{k\pi i x} + \alpha e^{-k\pi i x} = 2\alpha\cos(k\pi x)$ mit $k\in\mathbb{Z}$. Da cos eine gerade Funktion ist, können wir $k\in\mathbb{N}_0$ annehmen. Damit lauten die separierte-Variablen-Lösungen

$$u(t,x) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x) \qquad (t>0, x\in[0,1])$$

mit $k\in\mathbb{N}_0$ und $c_k\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 41 Definiere $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -f(-x) & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Da f stetig ist und $f(0) = 0$ gilt, ist $\widetilde{f}$ stetig. Außerdem ist $\widetilde{f}$ beschränkt. Nach Abschnitt 6.3 der Vorlesung ist die beschränkte Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t v = \partial_{xx} v \quad & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = \widetilde{f}(x) \quad & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x-y) \widetilde{f}(y)\, dy \qquad [\text{Definition von } \widetilde{f}] \\ &= -\int_{-\infty}^{0} G(t, x-y) f(-y)\, dy + \int_{0}^{\infty} G(t, x-y) f(y)\, dy \qquad [\text{1. Int.: Subst. } y \to -y] \\ &= -\int_{0}^{\infty} G(t, x+y) f(y)\, dy + \int_{0}^{\infty} G(t, x-y) f(y)\, dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \big(-G(t, x+y) + G(t, x-y)\big) f(y)\, dy = \int_{0}^{\infty} K(t,x,y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Definiere nun $u := v|_{(0,\infty)\times[0,\infty)}$, d.h. $u\colon (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto v(t,x)$. Da v auf ganz $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t v = \partial_{xx} v$ löst, löst u insbesondere die Gleichung $\partial_t u = \partial_{xx} u$ auf $(0,\infty) \times (0,\infty)$. Außerdem gilt $u(0,x) = v(0,x) = \widetilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,\infty)$. Es bleibt also nur zu zeigen, dass u auch die Randbedingung $u(t,0) = 0$ für $t > 0$ erfüllt. In der Tat gilt für ein beliebiges $t > 0$

$$u(t,0) = \int_0^\infty K(t,0,y) f(y)\, dy = \int_0^\infty \big(G(t, 0-y) - G(t, 0+y)\big) f(y)\, dy.$$

Wegen $G(t,-y) = (4\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{(-y)^2}{4t}) = (4\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{y^2}{4t}) = G(t,y)$ verschwindet der Integrand, so dass $u(t,0) = 0$ ist.

Aufgabe 42 Wir gehen in zwei Schritten vor:

(I) Separationsansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ durchführen.

(II) Sinnvolle Voraussetzungen an f und g formulieren und unter diesen das Problem lösen.

(I) Wir suchen im folgenden nur nach nicht-trivialen Lösungen, d.h. wir schließen $u(t,x) \equiv 0$ aus. Es sei $u(t,x) = v(t)w(x)$ Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\partial_{tt} u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi).$$

Setzt man $\partial_{tt} u(t,x) = v''(t)w(x)$ und $\partial_{xx} u = v(t)w''(x)$ in die Gleichung ein, so erhält man

$$v''(t)w(x) = v(t)w''(x) \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi). \tag{7}$$

Wir behaupten: Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$v''(t) = \lambda v(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

und

$$w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{für } x \in (-\pi,\pi) \tag{9}$$

gilt.

Für diejenigen $t \in \mathbb{R}$ mit $v(t) = 0$ folgt aus (7), dass $v''(t)w(x) = 0$ für alle $x \in (-\pi, \pi)$ gilt. Ist $v''(t) \neq 0$, so folgt $w(x) = 0$ und damit $u(t, x) = 0$, was wir aber ausgeschlossen haben. Somit ist $v''(t) = 0$ und damit gilt für dieses t dann $v''(t) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda v(t)$ sogar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entsprechend folgt für alle x mit $w(x) = 0$, dass $w''(x) = 0 = \lambda w(x)$ gelten muss.

Für diejenigen $t \in \mathbb{R}$ mit $v(t) \neq 0$ und $x \in (-\pi, \pi)$ mit $w(x) \neq 0$ folgt aus (7)

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} \,.$$

Da die linke Seite nicht von x abhängt, tut es auch die rechte Seite nicht. Da die rechte Seite nicht von t abhängt, tut es auch die linke Seite nicht. Daher existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Wir behaupten: $\lambda \leqslant 0$.
Wir haben $w''(x) = \lambda w(x)$. Ist $\lambda > 0$, so ist die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben durch

$$w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Die Randbedingung $v(t)w(\pi) = u(t, \pi) \stackrel{!}{=} u(t, -\pi) = v(t)w(-\pi)$ impliziert, dass $w(\pi) = w(-\pi)$ gilt (sonst wäre $v(t) = 0$, was wir ja ausgeschlossen haben). Die 2. Randbedingung impliziert entsprechend, dass $w'(\pi) = w'(-\pi)$ gilt.

Die Bedingungen $w(\pi) = w(-\pi)$ und $w'(\pi) = w'(-\pi)$ bedeuten für $w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$\begin{aligned} ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} + be^{\sqrt{\lambda}\pi}, \\ \sqrt{\lambda}ae^{\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= \sqrt{\lambda}ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}be^{\sqrt{\lambda}\pi}. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu prüfen, dass dieses LGS in a und b für $\lambda > 0$ nur die triviale Lösung $a = b = 0$ hat (Determinante der entspr. Matrix!). Daher folgt $w \equiv 0$, was wir ja ausgeschlossen haben.

Im Fall $\lambda = 0$ ist die Lösung von $w''(x) = \lambda w(x) = 0$ gegeben durch

$$w(x) = ax + b.$$

Die periodischen Randwerte $w(\pi) = w(-\pi)$ implizieren $a = 0$.

Im Fall $\lambda < 0$ ist die Lösung von $w''(x) = \lambda w(x)$ gegeben durch

$$w(x) = a\sin(\sqrt{-\lambda}x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Die Randbedingungen implizieren

$$\begin{aligned} w(\pi) = w(-\pi): &\quad a\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = -a\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\pi), &(10)\\ w'(\pi) = w'(-\pi): &\quad a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - b\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\pi). &(11) \end{aligned}$$

(Wir haben die zweite Zeile mit $\sqrt{-\lambda}$ dividiert und genutzt, dass sin ungerade bzw. cos gerade ist.)

Ist $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \neq 0$, so folgt aus (10): $a = 0$ und aus aus (11): $b = 0$, was auf $w \equiv 0$ führt, diesen trivialen Fall hatten wir aber ausgeschlossen. Damit ist $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ und somit $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$.

Ist $\lambda = 0$, so haben wir nach (8): $v''(t) = 0$ und damit $v(t) = ct + d$.

Ist $\lambda < 0$, so wissen wir ja bereits $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$. Dann ist die Lösung von $v''(t) = \lambda v(t)$ gegeben durch $v(t) = c\sin(\sqrt{-\lambda}t) + d\cos(\sqrt{-\lambda}t)$.

Wir fassen zusammen: Die Lösungen $w(x)$ und $v(t)$ lauten [vgl. Fall $\lambda = 0$]

$$w(x) = b \quad \text{und} \quad v(t) = ct + d \quad (b, c, d \in \mathbb{R})$$

oder [vgl. Fall $\lambda < 0$]

$$w(x) = a\sin(kx) + b\cos(kx) \quad \text{und} \quad v(t) = c\sin(kt) + d\cos(kt) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}).$$

Daraus ergibt sich für $u(t, x) = v(t)w(x)$

$$u(t, x) = Bt + D,$$

wobei $B, D \in \mathbb{R}$, oder

$$u(t, x) = A\sin(kx)\sin(kt) + B\sin(kx)\cos(kt) + C\cos(kx)\sin(kt) + D\cos(kx)\cos(kt), \tag{12}$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

(II) Für eine Lösung der Form (12) gilt insbesondere für jedes $x \in [-\pi, \pi]$

$$u(0, x) = B\sin(kx) + D\cos(kx) \qquad \text{und} \qquad \partial_t u(t, x) = Ak\sin(kx) + Ck\cos(kx).$$

Nach (I) kann man das Problem z.B. für $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ lösen. Die Lösung ist dann gegeben durch $u(t, x) = \sin(x)\cos(t) + \cos(x)\sin(t)$ (hier: $k = 1, A = 0, B = 1, C = 1, D = 0$). Beispielsweise für $f(x) = \sin(3x) + 2\cos(3x)$ und $g(x) = \sin(3x) + 3\cos(3x)$ ergibt sich als Lösung $u(t, x) = \frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t) + \sin(3x)\cos(3t) + \cos(3x)\sin(3t) + 2\cos(3x)\cos(3t)$ (hier: $k = 3, A = \frac{1}{3}$, $B = 1, C = 1, D = 2$).

Man kann tatsächlich jede stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zulassen. Nach dem Hinweis lassen sich diese in eine Fourierreihe entwickeln, d.h. die Zahlenfolgen $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(b_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_k(g))_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(b_k(g))_{k\in\mathbb{N}}$ sind absolut summierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big), \tag{13}$$

$$g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(g)\cos(kx) + b_k(g)\sin(kx)\big). \tag{14}$$

Nun wollen wir die in (I) gefundenen Lösungen überlagern, um das Problem mit den Anfangswerten $u(0, x) = f(x)$ und $\partial_t u(0, x) = g(x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$ zu lösen. Für $u(t, x)$ machen wir den Ansatz

$$B_0 t + D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin(kx)\sin(kt) + B_k\sin(kx)\cos(kt) + C_k\cos(kx)\sin(kt) + D_k\cos(kx)\cos(kt).$$

Dann sind

$$u(0, x) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin(kx) + D_k\cos(kx) \overset{!}{=} f(x) \overset{(13)}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$$

und

$$\partial_t u(0, x) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} kA_k\sin(kx) + kC_k\cos(kx) \overset{!}{=} g(x) \overset{(14)}{=} \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g)\cos(kx) + b_k(g)\sin(kx).$$

Koeffizientenvergleich ergibt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \tfrac{1}{k}\, b_k(g), \qquad B_k = b_k(f), \qquad C_k = \tfrac{1}{k}\, a_k(g), \qquad D_k = a_k(f)$$

sowie $B_0 = \frac{a_0(g)}{2}$, $D_0 = \frac{a_0(f)}{2}$. Das liefert gleich mit, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(|A_k| + |B_k| + |C_k| + |D_k|) < \infty$ ist, und somit die Reihe in unserem Ansatz absolut konvergiert. Folglich ist $u(x, t) =$

$$\frac{a_0(g)}{2}t + \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(g)}{k}\sin(kx)\sin(kt) + b_k(f)\sin(kx)\cos(kt) + \frac{a_k(g)}{k}\cos(kx)\sin(kt) + a_k(f)\cos(kx)\cos(kt)$$

Lösung des Problems.

Bemerkung: Man könnte die Forderungen an f und g weiter abschwächen. Damit wollen wir uns aber nicht mehr beschäftigen.