Ergänzung zum 4. Tutorium

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Beispiel

Bestimmen Sie die ersten Glieder der Potenzreihenlösung von

$$y'' - \frac{2}{1-x}y' + \frac{1}{1-x}y = 0.$$

Für welche x konvergiert die Potenzreihe (mindestens)?

Lösung

Wir erhalten folgende Potenzreihenentwicklungen für die auftretenden Funktionen:

Ansatz: $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \dots,$

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}x^j = 1c_1x^0 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + \dots,$$

$$y''(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)c_{j+2}x^j = 1 \cdot 2c_2x^0 + 2 \cdot 3c_3x^1 + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = x^0 + x^1 + x^2 + \dots \quad \text{für } |x| < 1 \text{ (geom. Reihe).}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} -2y'(x) + y(x) &= \sum_{j=0}^{\infty}(-2(j+1)c_{j+1} + c_j)x^j \\ &= (-2 \cdot 1c_1 + c_0)x^0 + (-2 \cdot 2c_2 + c_1)x^1 + (-2 \cdot 3c_3 + c_2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

und daher (Cauchy-Produkt)

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{1-x}y' + \frac{1}{1-x}y = \frac{-2y'+y}{1-x} = (-2y'(x)+y(x))\frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \underbrace{(-2(k+1)c_{k+1}+c_k)x^k}_{\substack{k\text{-ter Summand} \\ \text{in PR von } -2y'(x)+y(x)}} \quad \underbrace{x^{j-k}}_{\substack{(j-k)\text{-ter Summand} \\ \text{in PR von } \frac{1}{1-x}}} \quad = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}(-2(k+1)c_{k+1}+c_k)\right)x^j. \end{aligned}$$

Dabei können wir c_0 und c_1 frei wählen, weil keine Anfangswerte vorgegeben sind.

Koeffizientenvergleich liefert nun:

	y''	$\frac{-2y'+y}{1-x}$		Rechte Seite
x^0 :	$1 \cdot 2c_2$	$-2c_1 + c_0$		0
x^1 :	$2 \cdot 3c_3$	$-2c_1 + c_0 - 4c_2 + c_1$	$(= -1 \cdot 2c_2 - 4c_2 + c_1)$	0
x^2 :	$3 \cdot 4c_4$	$-2c_1 + c_0 - 4c_2 + c_1 - 6c_3 + c_2$	$(= -2 \cdot 3c_3 - 6c_3 + c_2)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x^j :	$(j+1)(j+2)c_{j+2}$	$(= -j(j+1)c_{j+1} - 2(j+1)c_{j+1} + c_j)$		0

Wir erhalten

$$(j+1)(j+2)c_{j+2} - j(j+1)c_{j+1} - 2(j+1)c_{j+1} + c_j = 0,$$

also

$$c_{j+2} = c_{j+1} - \frac{1}{(j+1)(j+2)}c_j \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots$$

Damit ergibt sich für die ersten Koeffizienten:

$j = 0$:	c_2	$= c_1 - \frac{1}{1\cdot 2}c_0$	$= -\frac{1}{2}c_0 + c_1$
$j = 1$:	c_3	$= c_2 - \frac{1}{2\cdot 3}c_1$	$= -\frac{1}{2}c_0 + \frac{5}{6}c_1$
$j = 2$:	c_4	$= c_3 - \frac{1}{3\cdot 4}c_2$	$= -\frac{11}{24}c_0 + \frac{3}{4}c_1$

(Eine geschlossene Form ist nicht erkennbar.)

Die Potenzreihenlösung beginnt also mit

$$y(x) = c_0(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + (\ldots?)) + c_1(x^1 + 1x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + (\ldots?)).$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$, weil die geometrische Reihe für diese x konvergiert (vgl. 1.13).