

## Ergänzung zum 5. Tutorium

### Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

#### DGL-Systeme erster Ordnung / AWP

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

$$F \text{ stetig, } (x_0, \vec{y}_0) \in D$$

#### Übersicht

Voraussetzung an $F$	Aussage	Hinweis
keine (außer Stetigkeit)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Existenz mind. einer Lsg.</li> <li>max. Ex.-Intervalle („bis zum Rand von <math>D</math>“) (Satz von <i>Peano</i>)</li> </ul>	i. A. keine Eindeutigkeit und unterschiedlich große Ex.-Intervalle (s. Aufg. 25)
$F$ bzgl. $y_1, y_2, \dots, y_n$ in $D$ stetig partiell differenzierbar	<i>zusätzlich:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>Eindeutigkeit (Satz von <i>Picard-Lindelöf</i>)</li> </ul>	Beweis mit Fixpunktargument
$F(t, \vec{y}) = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ , wobei $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig $\vec{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig $I$ Intervall ( $D = I \times \mathbb{R}^n$ ) (lineares DGL-System)	<i>zusätzlich:</i> (Ohne Anfangswerte) <ul style="list-style-type: none"> <li>hom. System (<math>\vec{b} \equiv 0</math>) hat <math>n</math>-dim. Lsg.-raum</li> <li>Variation-der-Konstanten-Formel, um Lsg. des inhom. Problems zu ermitteln</li> <li>„allg. Lsg.“ = allg. Lsg. d. hom. Problems + eine spezielle Lsg. d. inhom. P.“</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schreibweise:  <math>F(t, \vec{y}) = \dots</math> statt  <math>F(x, \vec{y}) = \dots</math></li> <li><math>\frac{\partial}{\partial \vec{y}} F(t, \vec{y}) = A(t)</math></li> </ul>
$F(t, \vec{y}) = A\vec{y}(t)$ , wobei $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konst. (lineares DGL-System mit konst. Koeff.)	<i>zusätzlich:</i> (Ohne Anfangswerte) <ul style="list-style-type: none"> <li>„vollständige Lösungstheorie“</li> </ul>	Erhalte Fundamental-S. nach <ul style="list-style-type: none"> <li>3.2/3.3 (EW von <math>A</math> &amp; Basis der Haupträume)</li> </ul> oder <ul style="list-style-type: none"> <li>„<math>e^{tA}</math>“</li> </ul>