Ergänzung zum 6. Tutorium

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

I. Beispiele partieller Differentialgleichungen

Hier:
jeweils partielle Differentialgleichung von *zweiter Ordnung*,
gesuchte Lösung $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y, z)$.

$3u_{xx}$	$+7u_{xz}$	$+5u$	$= 0$	*linear*	(mit konst. Koeff., homogen)
zyu_{xx}	$+\sin(x)u_{xz}$	$+x^2u$	$= e^{x+y}$	*linear*	(inhomogen)
zyu_{xx}	$+\sin(x)u_{xz}$	$+u^2$	$= e^{x+y}$	*quasilinear*	(„genauer“: semilinear)
zyu_{xx}	$+\sin(x)u_{xz}$	$+u_yu$	$= e^{x+y}$	*quasilinear*	(„genauer“: semilinear)
zyu_{xx}	$+u_yu_{xz}$	$+u_yu$	$= e^{x+y}$	*quasilinear*	
zyu_{xx}	$+u_{xy}u_{xz}$	$+u_yu$	$= e^{x+y}$	*voll nicht-linear*	

II. Beispiele zu Charakteristiken

a) Bestimmen Sie die Lösung von:
$$2xy\partial_x u + \partial_y u = u, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(x,0) = x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

Für die entsprechenden Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt:
$\vec{a}(x,y,u) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \end{pmatrix}$, $b(x,y,u) = u$.

Anfangswerte sind vorgegeben auf $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$.

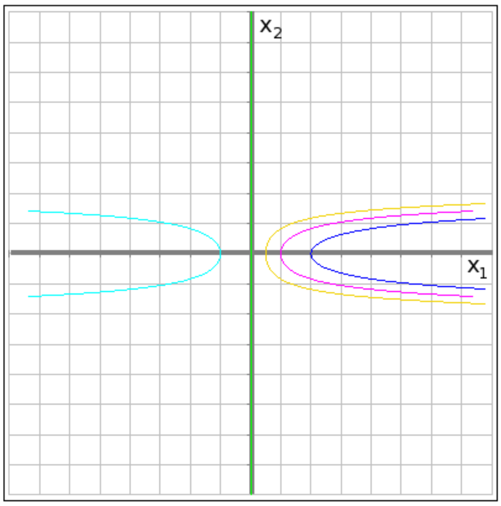
Das charakteristische System lautet:
$$\vec{k}'(s) = \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) = \vec{a}(k_1(s), k_2(s), w(s)) = \begin{pmatrix} 2k_1(s)k_2(s) \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$w'(s) = b(\vec{k}(s), w(s)) = b(k_1(s), k_2(s), w(s)) = w(s).$$

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ lösen wir das charakteristische System mit folgenden Anfangswerten (vgl. Abschnitt 4.4): $\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\xi, 0) \end{pmatrix}$.
Also $k_1(0) = \xi$, $k_2(0) = 0$, $w(0) = f(\xi, 0) = \xi$.

Somit folgt $k_2(s) = s$ und damit $k_1'(s) = 2k_1(s) \cdot s$, also $k_1(s) = \xi e^{s^2}$. Außerdem folgt $w(s) = \xi e^s$.

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ erhalten wie so eine Charakteristik. Diese bezeichnen wir mit $\begin{pmatrix} \vec{k}(\cdot, \vec{\xi}) \\ w(\cdot, \vec{\xi}) \end{pmatrix}$. (Es gilt also $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi e^{s^2} \\ s \end{pmatrix}$ und $w(s, \vec{\xi}) = \xi e^s$ für alle $s \in \mathbb{R}$.)

Zur Veranschaulichung zeichnen wir einige Grundcharakteristiken (nämlich für $\xi = 0$ (grün), für $\xi = 1/2$ (gelb), $\xi = 1$ (violett), $\xi = 2$ (blau) und für $\xi = -1$ (türkis) in den Argumentraum:



(Das ist natürlich jeweils der an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelte Funktionsgraph der Funktion $s \mapsto \xi e^{s^2}$.)

Wir wollen nun den Wert der Lösung an einer (beliebigen aber festen) Stelle (x, y) bestimmen. Dazu überlegen wir uns, welche Grundcharakteristik durch (x, y) verläuft: Wir suchen also $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ (und damit eine Grundcharakteristik $\vec{k}(\cdot, \vec{\xi})$) so, dass es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Das ist gleichbedeutend mit $\begin{cases} k_1(s, \vec{\xi}) = \xi e^{s^2} = x \\ k_2(s, \vec{\xi}) = s = y \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} s = y \\ \xi = xe^{-y^2} \end{cases}$.

(Das bedeutet: Die Grundcharakteristik $\vec{k}(\cdot, \begin{pmatrix} xe^{-y^2} \\ 0 \end{pmatrix})$ (und nur diese) verläuft durch den Punkt (x, y) (und zwar bei $s = y$). Wir haben also wieder den Fall, dass die Grundcharakteristiken den gesamten Argumentraum überdecken und sich nicht schneiden.)

Den Wert der Lösung an der Stelle (x, y) erhalten wir jetzt durch Auswerten von $w(\cdot, \begin{pmatrix} xe^{-y^2} \\ 0 \end{pmatrix})$ bei $s = y$:

$u(x, y) = u(\vec{k}(y, \begin{pmatrix} xe^{-y^2} \\ 0 \end{pmatrix})) = w(y, \begin{pmatrix} xe^{-y^2} \\ 0 \end{pmatrix}) = xe^{-y^2} e^y = xe^{y-y^2}$.

Probe: Aus

$$\partial_x u(x, y) = e^{y-y^2}$$

und

$$\partial_y u(x, y) = xe^{y-y^2}(1 - 2y)$$

folgt

$$2xy\partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) = 2xye^{y-y^2} + xe^{y-y^2} - 2xye^{y-y^2} = xe^{y-y^2} = u(x, y)\,,$$

d.h. u ist tatsächlich Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Außerdem ist

$$u(x, 0) = x$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

b) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x, y > 0\}$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x\partial_x u + y\partial_y u = \frac{y}{x}$$

in D und bestimmen Sie die Lösung $u = u(x,y)$ dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u(\xi, \xi^2) = \xi \text{ für alle } \xi > 0$$

genügt. Wie sehen die Grundcharakteristiken aus?

Skizzieren Sie in der (x,y)-Ebene die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie einige Grundcharakteristiken.

Überprüfen Sie, ob Ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.

Auf welcher Teilmenge von D ist die von Ihnen berechnete Lösung erklärt?

Lösung:

Das charakteristische System der gegebenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s) \\ k_2'(s) &= k_2(s) \\ w'(s) &= \frac{k_2(s)}{k_1(s)}. \end{aligned} \tag{CS}$$

Die Anfangswerte sind vorgegeben auf $\Gamma = \{(\xi, \xi^2) \; : \; \xi > 0\}$. Zu festem $\vec{\xi} \in \Gamma$, d.h. $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ für ein $\xi > 0$, lauten die Anfangswerte für das charakteristische System:

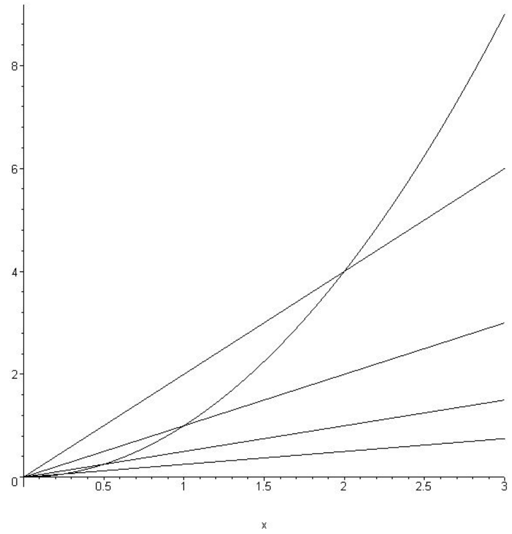
$$\begin{pmatrix} \vec{k}(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ f(\xi) \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \begin{array}{rcl} k_1(0) & = & \xi \\ k_2(0) & = & \xi^2 \\ w(0) & = & \xi. \end{array}$$

Für festes $\xi > 0$ erhält man als eindeutige Lösung der ersten beiden Gleichungen von (CS) mit obigen Anfangswerten die Grundcharakteristik

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi^2 e^s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dies ist eine Halbgerade durch $\begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ohne den Ursprung. Alle Grundcharakteristiken sind also Halbgeraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in D.

Skizze:



Berechnung der Lösung: Es ist klar, dass durch jeden Punkt $(x, y) \in D$ genau eine Grundcharakteristik verläuft. Dabei gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{k}(s,\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi^2 e^s \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = \frac{y}{x} \ \text{ und } \ s = \ln\frac{x}{\xi} = \ln\frac{x^2}{y}.$$

Also ist

$$u(x,y) = w(s,\xi)\big|_{s=\ln\frac{x^2}{y},\,\xi=\frac{y}{x}}.$$

Beachte, dass $\frac{d}{ds}w(s,\xi) = \frac{k_2(s,\xi)}{k_1(s,\xi)} = \xi$ (vgl. (CS)) ist, was wegen $w(0) = \xi$ auf

$$w(s,\xi) = w(0,\xi) + \xi s = \xi(1+s)$$

führt. Man erhält also für jedes $(x,y) \in D$

$$u(x,y) = \frac{y}{x}(1 + \ln(\frac{x^2}{y})).$$

Probe:

Für $(x,y) \in D$ setze $z := z(x,y) := (1 + \ln(\frac{x^2}{y}))$. Dann gilt

$$\partial_x u = -\frac{y}{x^2}z + \frac{y}{x}(\frac{y}{x^2}\cdot\frac{2x}{y}) = -\frac{y}{x^2}z + \frac{2y}{x^2},$$

$$\partial_y u = \frac{1}{x}z + \frac{y}{x}(\frac{y}{x^2}\cdot\frac{-x^2}{y^2}) = \frac{1}{x}z - \frac{1}{x},$$

also

$$x\partial_x u + y\partial_y u = -\frac{y}{x}z + \frac{2y}{x} + \frac{y}{x}z - \frac{y}{x} = \frac{y}{x},$$

d.h. u ist tatsächlich Lösung. Außerdem ist für alle $\xi > 0$

$$u(\xi,\xi^2) = \frac{\xi^2}{\xi}(1 + \ln(\frac{\xi^2}{\xi^2})) = \xi$$

erfüllt.

Die Lösung existiert auf ganz D.