A1) a) 1) lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

Lösungen: $\underline{y(x) = c e^{x} - x - 2}$, c beliebig konstant

(allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y_0(x) = c e^{x}$
partikuläre Lösung $y_p(x) = -x - 2$)

2) DGL mit getrennten Variablen ($f(x) = 1$, $g(y) = 1 + y^2$)

Lösungen: $\underline{y(x) = \tan(x + C)}$, C konstant

$(2k+1)\frac{\pi}{2} < x + C < (2k+3)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

3) wie unter 1)

Lösungen: $\underline{y(x) = c e^{-x^2} - \frac{1}{2}}$, c beliebig konstant

(Zusatzübung: Man versuche zur Lösung von 1) und 3) einen Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit zu bestimmenden a_k)

b) 1) ($x \neq 0$) Genügt y der vorliegenden DGL, so gilt für z mit $z(x) = x\, y(x)$:

$$z'(x) = -\frac{(z-1)^2}{2} \frac{1}{x}$$

. Das ist eine DGL mit getrennten Variablen. Man erhält: $z(x) = \frac{2}{\ln|x| + c} + 1$

und also:

$$\underline{y(x) = \frac{2}{x \ln|x| + cx} + \frac{1}{x}} \qquad (x \neq 0)$$

c beliebig konstant. Ist c gegeben, so ist y auf jedem Intervall definiert, das 0 und $\pm \exp(-c)$ nicht enthält.

2) Gilt für y : $y'(x) = (x-y(x))^2+1$, so folgt für $z(x) := x - y(x)$ die DGL $z' = -z^2$, also:

$$z(x) = \frac{1}{x+C} \quad \text{oder} \quad \underline{y(x) = x - \frac{1}{x+C}}$$ auf jedem Intervall, das $-c$ nicht enthält.

A2) a) Fasse die vorliegende DGL als DGL für die Umkehrfunktion $x(y)$ von $y(x)$ auf, d.h. auch vertausche die Bedeutung der Variablen: x ist die abhängige und y die unabhängige Variable. $y'(x)$ ist durch $\frac{1}{x'(y)}$ zu ersetzen. Die vorliegende DGL lautet dann:

$$x'(y) = x(y) - (1+y^2)\, x(y)^{-1}$$

Dies ist eine DGL vom Bernoulli Typ mit $\alpha = -1$. Man erhält die Lösungen in impliziter Form

$$\underline{x^2 = y^2 + y + \frac{3}{2} + c\exp(2y)}, \quad c \text{ konstant (beliebig)}$$

b) Die vorliegende DGL ist

$$y'x(1+xy) = y(1-xy)$$

Substituiert man $y(x) \to z(x) := xy(x)$, so erhält man für z die DGL $z'(1+z) = 2\frac{z}{x}$ mit getrennten Variablen. Man findet

$$z(x) = c\,x^2 e^{-z(x)}$$ und also

die Lösungen in impliziter Form $\underline{xy\,e^{xy} = cx^2}$, c konstant

c) Hier liegt die inhomogene lineare Dgl

$$y' = y\,\frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2}$$ vor mit den Lösungen:

$$\underline{y(x) = \frac{\arcsin(x) + C}{\sqrt{1-x^2}}}\ , \quad |x| < 1\ , \quad C \text{ konstant}$$

und $$\underline{y(x) = \frac{C - \ln(x + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}}\ , \quad |x| > 1\ , \quad C \text{ konstant}$$

A3 a)
$$y_1(x) = 1 + 2\sin(x)$$
$$y_2(x) = y_1(x) + \sin^2(x) = 1 + 2\left(\sin(x) + \frac{1}{2!}\sin^2(x)\right)$$
$$y_3(x) = y_2(x) + \frac{1}{3}\sin^3(x) = y_2(x) + 2\,\frac{1}{3!}\sin^3(x)$$
$$y_4(x) = y_3(x) + 2\,\frac{1}{4!}\sin^4(x)$$

b) Nach a) ist zu vermuten, dass gilt:

$$\underline{y_n(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\sin^j(x)}\ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Beweis mit vollständiger Induktion (einfach). a) ist der Induktionsanfang.

Da $$1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\sin^j(x) = 1 + 2\left(e^{\sin(x)} - 1\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

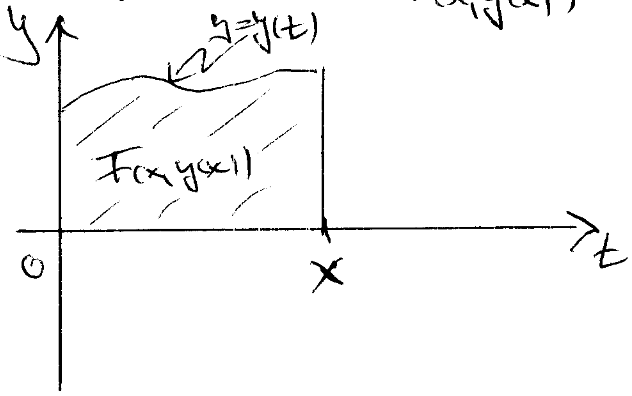
gilt, hat man für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \underline{2e^{\sin(x)} - 1 =: y(x)}$$

Dies ist die Lösung des vorliegenden AWP. Nachrechnen!

A4 Gefragt ist nach Lösungen $y = y(x)$ der Gleichung

$$F(x,y(x)) = \int_0^x y(t)\,dt. \qquad (*)$$



$(*) \Rightarrow$: $\underline{D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))\,y'(x) = y(x)}$ $\qquad (**)$

Im Fall a) bedeutet das: $(x \neq 0)$

$$-\frac{1}{2}\frac{y^3}{x^2} + \frac{3}{2}\frac{y^2}{x}\,y'(x) = y(x)$$

Dies ist eine Ähnlichkeitsdgl $\underline{\frac{3}{2}\frac{y^2}{x^2}\,y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{x^3}}$

Für $v(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2$ erhält man die lineare inhomogene DGl $\quad v'(x) + \frac{4}{3}\frac{1}{x}v(x) = \frac{4}{3}\frac{1}{x}$ und schließlich die Lösungen in impliziter Form: $\underline{y^2 = x^2 + c\,x^{\frac{2}{3}}}$, c konst.

Im Fall b) bedeutet $(**)$:

$$\underline{\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\,y' = y}$$

Hier können die Variablen getrennt werden. Man erhält

$$\underline{y(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+c}}} \qquad \left(\text{für die } x \text{ für die } x^2+c \neq 0\right)$$