Aufgabe 1

Für $y_0 = 0$ ist $y = 0$ eine Lösung.

Sonst ist $y(0) > 0$ und also auch (mindestens für kleine $t > 0$) $y(t) > 0$.

Die DGL ist eine DGL mit getrennten Variablen. Oder argumentiere so: Durch die Substitution $y \to z$, $z(t) := \sqrt{y(t)}$, wird die DGL zu $z'(t) = -\frac{\alpha}{2}$ mit der allgemeinen Lösung $z(t) = c - \frac{\alpha}{2} t$ ($c > 0$ konst)

$\Rightarrow y(t) = (c - \frac{\alpha}{2} t)^2$, $y(0) = y_0$ liefert $c = \sqrt{y_0}$.

Also $\underline{y(t) = (\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{2} t)^2}$

Für $t_0 = \frac{2\sqrt{y_0}}{\alpha}$ wird $y(t_0) = 0$ (das Gefäß ist leer).

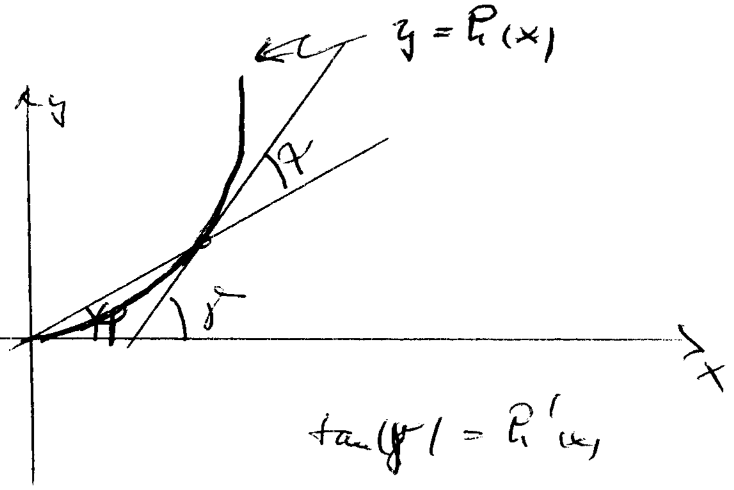
Aufgabe 2

Es liegt eine lineare inhomogene DGL 1. Ordnung für $v = v(t)$ vor.

$$v'(t) + \rho v(t) = g \quad | \cdot e^{\rho t}$$

$$(v(t) e^{\rho t})' = g e^{\rho t} \xrightarrow{\int_0^t \ldots dt} \underline{v(t) = \frac{g}{\rho} + (v_0 - \frac{g}{\rho}) e^{-\rho t}}$$

Aufgabe 3



$\tan(\psi) = h'(x)$

Bedingung der Aufgabe: $\alpha = \frac{\varphi}{2}$.

Man liest ab: $\psi = \varphi + \alpha = \varphi + \frac{\varphi}{2}$.

Wir verwenden $$\tan\left(\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\tan\varphi + \tan\frac{\varphi}{2}}{1 - \tan\varphi \tan\frac{\varphi}{2}}.$$

Wir suchen die Kurve in Parameterform bzw. in Darstellung durch Polarkoordinaten
$$x = x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$

Wir haben
$$y(\varphi) = h(x(\varphi))$$
$$\parallel$$
$$r(\varphi)\sin\varphi = h(r(\varphi)\cos\varphi)$$

Differentiation nach φ mit $h'(r(\varphi)\cos\varphi) = \tan(\varphi + \frac{\varphi}{2})$ liefert:
$$r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi = \frac{\tan\varphi + \tan\frac{\varphi}{2}}{1 - \tan\varphi\tan\frac{\varphi}{2}}\left(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\right)$$

$\Rightarrow \quad r'(\varphi) = r(\varphi)\cot\frac{\varphi}{2}$ (getrennte Variable)

$\Rightarrow \quad \underline{\ln r(\varphi) + c = 2\ln\sin\frac{\varphi}{2}}$ Mit $a > 0$ und $c = -\ln 2a$

kann man das formal schöner schreiben: $\underline{r(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)}$

Aufgabe 4

Die Gleichung $\underline{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}}$ $(\alpha \neq 1)$, $y > 0$,

soll durch die Substitution $y \to z$, $z(x) = y(x)^{\beta}$,

mit einem geeigneten β gelöst werden.

Die y-Dgl wird durch die Substitution zur

Dgl
$$\frac{1}{\beta} z' + p(x) z = q(x) z^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}} \quad \text{für } z = z(x).$$

Durch Wahl von $\underline{\beta = 1-\alpha}$ $(\alpha \neq 1\,!)$ erhält man

für $z = z(x)$ die lineare inhomogene Dgl

$$z' + (1-\alpha)p(x) z = (1-\alpha)q(x).$$

Ist z hier Lösung, $z(x) > 0$, so ist $y(x) = z(x)^{\frac{1}{\beta}}$

Lösung der Ausgangsgleichung.

Versuchen Sie hiermit die Lösungsformel der Vorlesung

(Abschnitt 2.3) wiederzufinden.