Zu den Aufgaben des 3. Üblattes

(Bezeichnungen wie im 4. Kapitel.
A1 a), b), A2 a), b) Sätze 1, 2
A3 Satz 3)

A1a) $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ werden aus

$$(1)\quad \chi(t) = t^2 \sin t \qquad ((4), \text{Satz } 2)$$

$$(2)\quad \mathring{\chi}(t) = t\,\mathring{\varphi}(t) \qquad ((5), \text{Satz } 2)$$

und $\chi(t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$, $\varphi(t_0) = 0$ berechnet.

$$(1) \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \Rightarrow \underline{\varphi(t)} = \int_{\pi/6}^{t} \frac{\mathring{\chi}(\tau)}{\tau}\,d\tau = \underline{-\cos t + t\sin t + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{\pi}{12}}$$

A1b) Die Gleichungen für $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ lauten hier:

$$(1)\quad x = \varphi(t) = t^3 + t$$

$$(2)\quad \mathring{\chi}(t) = t\,\mathring{\varphi}(t) = 3t^3 + t$$

$$\varphi(t_0) = 2, \quad \chi(t_0) = \frac{9}{4}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$t_0 = 1 \Rightarrow \chi(1) = \frac{9}{4} \quad (3)$$

$$\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix} \Rightarrow \underline{y = \chi(t) = \tfrac{3}{4}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2 + 1}$$

A2a) 1) $y(x) = ax + \sqrt{4+a^2}$, $a$ konst, sind Lösungsgeraden

2) (wie in A1a), b))

Die Gleichungen für $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$:

$$y = \chi(t) = t\varphi(t) + \sqrt{4+t^2} \qquad (1)$$

$$\mathring{\chi}(t) = t\,\mathring{\varphi}(t) \qquad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $x = \varphi(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{4+t^2}}$

Dies und (1) ergibt $y = \psi(t) = \dfrac{4}{\sqrt{4+t^2}}$

Hier kann man $t$ eliminieren: Man erhält

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad y > 0$$

A2b) Setze $y' = u$. Die Dgl wird zu

$(u')^2 + xu' - u = 0$, die wieder wie oben behandelt wird.

1) ~~Lösungsgeraden~~: $u(x) = ax + a^2$ (a konst, beliebig)

$\Rightarrow$ $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + a^2x + b$ (a, b konst)

2) $x = \varphi(t)$, $u = \psi(t)$ werden aus den Gleichungen

$$\psi(t) = t\varphi(t) + t^2$$

und $\dot\psi(t) = t\dot\varphi(t)$ berechnet.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) = -2t \\ u = \psi(t) = -t^2 \end{array} \right| \quad \text{oder} \quad u = -\frac{x^2}{4} = y'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{x^3}{12} + c, \quad c \text{ konst.}$$

A3 (Abschnitt 4.2 / Satz 3)

Vorgehen: 1. Schritt $p = p(t)$ aus $tp\dot p - 2p^2 + 2p = 0$ berechnen.

2. Schritt $y$ aus $y' = p(y)$ berechnen

1. Schritt: 1) $p(t)=0 \Rightarrow y(x)=\text{const}$ ist Lösung

2) $p(t)\neq 0$ : $t\dot p(t)-2p(t)+2=0$ (linear inhomogen 1. Ordnung)

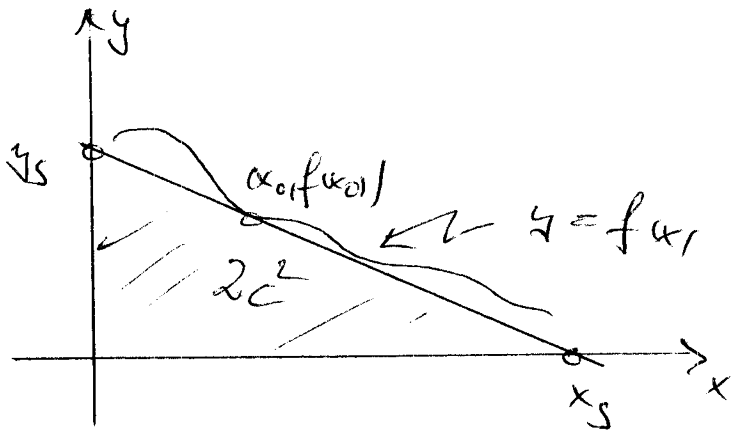
$$\Rightarrow p(t) = 1+ct^2$$

2. Schritt: $y'(=p(y)) = 1+cy^2$

$$\Rightarrow \quad x+c_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \arctan(\sqrt{c}\,y) & , c>0 \\ y & , c=0 \\ \frac{1}{2\sqrt{|c|}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{|c|}\,y}{1-\sqrt{|c|}\,y}\right| & , c<0 \end{cases}$$

$c, c_1$ konst.

A4




$(x_0,f(x_0))$ beliebiger Punkt der gesuchten Kurve.
Man findet $\quad x_s = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$y_s = -f'(x_0)\,x_s$$

Die Bedingung der Aufgabe gibt:

$$2c^2 = \frac{1}{2}|x_s||y_s| \quad \Rightarrow \quad x_0 f'(x_0)-f(x_0) = \pm 2c\sqrt{|f'(x_0)|}$$

Mit $x_0\to x$, $y=f(x)$ erhält man: $\underline{y = xy' \pm 2c\sqrt{|y'|}}$