zu Aufgabe 1 Ein integrierender Faktor $\mu = \mu(x,y)$ für die DGL $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$ wird in der Form $\mu = \mu(x,y) := P(\varphi(x,y))$ mit einer Funktion $P = P(t)$ gesucht. Die Bedingung für P lautet:

$$(*) \quad P'(\varphi(x,y)) = P(\varphi(x,y)) \frac{D_1 g(x,y) - D_2 f(x,y)}{f(x,y) D_2\varphi(x,y) - g(x,y) D_1\varphi(x,y)} .$$

A1

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $g(x,y) = -2xy$, $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$.

$(*)$ wird hier zu:

$$P'(x^2-y^2) = P(x^2-y^2)\left(\frac{-4y}{2y\,(x^2-y^2-1)}\right)$$

Für $P = P(t)$ ist das die DGL: $P'(t) = P(t) \dfrac{2}{1-t}$

$\Rightarrow P(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}$ und der hier bestimmte integrierende Faktor lautet: $\mu(x,y) \left(= P(x^2-y^2)\right) = \dfrac{1}{(x^2-y^2-1)^2}$

Ein Potential $F = F(x,y)$ der jetzt exakten DGL $\mu f dx + \mu g dy = 0$ lautet

$$F(x,y) = \frac{x}{1+y^2-x^2} ,$$

womit wir die Lösungen der DGL in impliziter Form in $\dfrac{x}{1+y^2-x^2} = c$ erhalten haben.

c ist eine beliebige Konstante.

A1/b) $f(x,y) = y^4 - 2y^2$, $g(x,y) = 3xy^3 - 4xy + y$, $\varphi(x,y) = x^\alpha y^\beta$

(*) wird zu:

$$p'(x^\alpha y^\beta) = p(x^\alpha y^\beta) \frac{-1}{x^\alpha y^\beta(\beta - 3\alpha) + x^\alpha y^{\beta-2}(4\alpha - 2\beta) - \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2}}$$

Dies ist nur sinnvoll, wenn $x^\alpha y^{\beta-2}(4\alpha-2\beta)$ und $\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2}$ konstant oder Null sind.

1. $4\alpha - 2\beta = 0$ ist für $\underline{\alpha = 1, \beta = 2}$ erfüllt. Dann ist $\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2} = 1$ und wir erhalten

$$p'(xy^2) = p(xy^2) \frac{+1}{+xy^2 + 1} \Rightarrow p(t) = 1 + t$$

$\Rightarrow$ ein integrierender Faktor ist

$$\underline{\mu_1(x,y) = 1 + xy^2}$$

2. $\underline{\alpha = 0}$. Dann muss $-2\beta y^{\beta-2}$ konstant sein. Also $\underline{\beta = 2}$

$$p'(y^2) = p(y^2) \frac{-1}{2y^2 - 4} \Rightarrow p(t) = \frac{1}{\sqrt{4-2t}}$$

$\Rightarrow$ ein weiterer integrierender Faktor ist

$$\underline{\mu_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-2y^2}}}$$

Mit Aufgabe 3 (dieses Übblattes) erhalten wir die Lösungen in impliziter Form $\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = \text{Const}$ oder: $\underline{(1+xy^2)\sqrt{4-2y^2} = C}$

Der Dgl sieht man direkt an, dass $y = 0$ eine Lösung ist. Die ist hier nicht mitenthalten. Sie ist oben beim Teilen durch y^3 verlorengegangen.

A1/c) $f(x,y)=xy^2+y$, $g(x,y)=-x\ln x$, $\mu(x,y)=x^{-1}y^{\alpha}$

$\partial_2(\mu f)=\partial_1(\mu g)$ wird zu:

$$(\alpha+2)(y+\frac{1}{x})=0 \qquad \text{für } x>0,\ y\neq 0$$

Dies ist durch $\alpha=-2$ erfüllbar.

Also: $\underline{\mu(x,y)=\frac{1}{xy^2}}$. Die DGL wird zu

$$1+\frac{1}{xy}-\frac{1}{y^2}(\ln x)\,y'=0$$

Ein Potential $F=F(x,y)$ berechnet sich aus

$D_1F=1+\frac{1}{xy}$ und $D_2F=-\frac{1}{y^2}\ln x$ zu

$$F(x,y)=x+\frac{1}{y}\ln x.$$

Die Lösungen sind dann: $\underline{x+\frac{1}{y}\ln x=\text{Const}}$ $(x>0,\ y\neq 0)$

Man sieht sofort, dass $\underline{y=0}$ auch eine Lösung ist.

A2/a) Die DGL ist exakt. ~~Berechne~~ $F=F(x,y)$ aus $D_1F=4x^3y^3-2xy$ und $D_2F=3x^4y^2-x^2$

$$\Rightarrow\quad F(x,y)=x^4y^3-x^2y$$

Also sind die Lösungen durch $\underline{x^4y^3-x^2y=\text{Const}}$ gegeben.

A2/b) Die DGL ist exakt. Berechne ein Potential aus

$D_1F(x,y)=y^2e^{xy^2}+4x^3$ und $D_2F(x,y)=2xye^{xy^2}-3y^2$.

Man erhält $F(x,y)=e^{xy^2}+x^4-y^3$ und somit die Lösungen: $\underline{e^{xy^2}+x^4-y^3=\text{Const}}.$

A3 Schreibe die Bedingungen, dass μ_1, μ_2 integrierende Faktoren sind, auf:

$$\left.\begin{aligned} \partial_2(\mu_1 f) &= \partial_1(\mu_1 g) & &|\cdot \mu_2 \\ \partial_2(\mu_2 f) &= \partial_1(\mu_2 g) & &|\cdot \mu_1 \end{aligned}\right\} -$$

Man erhält: $\underline{g\,A = f\,B}$ $\underline{(*)}$ mit $\underline{A = \mu_2 \partial_1 \mu_1 - \mu_1 \partial_1 \mu_2}$

und $\underline{B = \mu_2 \partial_2 \mu_1 - \mu_1 \partial_2 \mu_2}$

Setze $\lambda(x,y) := \dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}$

und definiere $y = y(x)$ durch $\lambda(x, y(x)) = C$ (const).

Berechne $\Lambda'(x)$ für $\Lambda(x) = \lambda(x, y(x))$.

Man erhält für alle x:

$$0 = \Lambda'(x) = \frac{1}{\mu_2^2(x,y(x))}\,(A + y' B)$$

$$= \frac{B}{\mu_2^2(x,y(x))}\left(\frac{A}{B} + y'\right)$$

$$= \frac{B}{\mu_2^2(x,y(x))}\left(\frac{f}{g} + y'\right)$$

oder $f + g y' = 0$ ✓

A4 Ist $f = u + iv$ in $\mathbb{C}$ holomorph, so gelten die Cauchy-Riemann DGlen in $\mathbb{R}^2$

$$\underset{(1)}{D_1 u = D_2 v}, \quad \underset{(2)}{D_2 u = -D_1 v}.$$

Die DGl $u\,dx + v\,dy = 0$ ist in $\mathbb{R}^2$ exakt, falls (3) $D_2 u = D_1 v$ gilt.

(2), (3) $\Rightarrow$ $u = u(x)$ (4)

(4), (2) $\Rightarrow$ $v = v(y)$

(1) $\Rightarrow$ $u'(x) = v'(y) = c$ (konst) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad u(x) = cx + c_1 \qquad c_1, c_2 \text{ konst} \in \mathbb{R}$$
$$v(y) = cy + c_2 \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+iy) = c(x+iy) + c_1 + ic_2$$

Also $\underline{f(z) = cz + D}$, $c \in \mathbb{R}$ konst. $D \in \mathbb{C}$ konst.