KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2011/2012
18.11.2011

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik

Aufgabe 1:

Es liegt die Differentialgleichung

$$(+) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ \alpha < x < \beta,$$

mit stetigen p, q vor.

y_1, y_2 seien Lösungen, die $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0,\ \alpha < x < \beta$, erfüllen.

Begründen Sie, dass $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ (c_1, c_2 beliebige Konstanten) die allgemeine Lösung von (+)ist.

Aufgabe 2:

Es sei $A = A(x)$ eine (n, n)–Matrix für jedes x mit $\alpha < x < \beta$. Die Elemente a_{jk} von A seien auf dem Intervall (α, β) differenzierbare Funktionen.

Definiere $f(x) := \det A(x), \alpha < x < \beta$.

Entwickeln Sie eine Formel für $f'(x)$.

Aufgabe 3:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seien verschiedene komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ mit $u_j(x) = e^{\lambda_j x}$ auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4:

Es liegt die Differentialgleichung (+) aus Aufgabe 1 vor, $y = u(x)$ sei eine nichttriviale Lösung.

Berechnen Sie eine weitere von u unabhängige Lösung $y = v(x)$ mit dem Ansatz $v(x) = u(x)w(x)$, indem Sie w berechnen.

Führen Sie dies für die folgenden Beispiele durch:

a) $y''(x) + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x}\,y'(x) - \dfrac{1}{2x^2}\,y(x) = 0,\ x > 0,\ u(x) = \sqrt{x}.$

b) $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$