Zum 5. Übungsblatt HM III WS 2011/12

A1 Es ist nachzuweisen, dass y_1, y_2 auf (α, β) l. u. sind: Ans

$$0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad , \alpha < x < \beta, \quad c_1, c_2 \text{ konst}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \quad , \alpha < x < \beta$$

$\Rightarrow$ (mit der Vor der Aufgabe: $y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) \neq 0 \ \forall x$)

$$c_1 = c_2 = 0 \checkmark$$

A2 (für $n=4$) : $A(x)$ sei eine $(4,4)$-Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x)$.

$$f(x) := \det A(x) = \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x))$$

$$\underline{f'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\det(\vec{a}_1(x+h), \vec{a}_2(x+h), \vec{a}_3(x+h), \vec{a}_4(x+h)) - \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x))\right)$$

mit Regeln zum Rechnen mit Det

$$\downarrow$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\det(\vec{a}_1(x+h) - \vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x+h), \vec{a}_3(x+h), \vec{a}_4(x+h))$$

$$+ \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x+h) - \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x+h), \vec{a}_4(x+h))$$

$$+ \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x+h) - \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x+h))$$

$$+ \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x+h) - \vec{a}_4(x))\Big)$$

$$= \underline{\det(\vec{a}_1'(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x)) + \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2'(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x))}$$

$$+ \underline{\det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3'(x), \vec{a}_4(x)) + \det(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x), \vec{a}_4'(x))}$$

analog für n beliebig.

Man mache sich genau klar, welche Regeln für das Rechnen mit Det verwendet werden.

__A3__ $\quad c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, c_i Konst.

Nachzuweisen ist: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Induktion: Anfang ($n = 1$): $c_1 e^{\lambda_1 x} = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$ ✓

Ind.schluss: $n-1 \to n$

$$(*) \quad c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} = 0$$

Differenziere nach x: $\quad \sum_{k=2}^{n} c_k (\lambda_k - \lambda_1) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0$

Nach Ind. vor. ($(n-1)$) gilt: $c_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$, $k = 2, \dots, n$

Da nach Vor. $\lambda_k \neq \lambda_1$ ($k = 2, \dots, n$) gilt, folgt

$$c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$$

Setzt man das in $(*)$ ein: $c_1 e^{\lambda_1 x} = 0 \quad \forall x$

also $c_1 = 0$ ✓

A4) $Ly(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

u mit $Lu(x) = 0$ ist gegeben.

Gesucht ist $v = u \cdot w$ mit

$L(v)(x) = L(uw)(x) = 0$

Es ist $L(uw)(x) = \underbrace{w(x)Lu(x)}_{=0} + w''u + (2u' + pu)w'$

Also: w ist zu berechnen aus

$$w'' + \left(\frac{2u'}{u} + p\right)w' = 0$$

Dies ist eine lineare homogene DGL 1. Ordnung für w'.

✓

Führt man dies durch für:

a) $$y''(x) + \frac{3}{2}\frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{2x^2}y(x) = 0, x > 0$$

mit $u(x) = \sqrt{x}$, so lautet die DGL für w:

$$\sqrt{x}\, w''(x) + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\, w'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad w'(x) = x^{-5/2} \quad \text{und also } \underline{v(x) = \frac{1}{x}}$$

b) $$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 \quad \text{mit } u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

so lautet die DGL für w so:

$$\underbrace{w''(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}w'(x)}_{(w'(x)e^{-\frac{x^2}{2}})' = 0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad w'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$