A 1) a) Wegen $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

bilden $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = x e^{-x}$, $y_3(x) = x^2 e^{-x}$

ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung.
(Satz 9 / Kap 6)

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung macht man den Ansatz $y_p = A x^l e^{-x}$.

Einsetzen in die DGL liefert:

$$e^{-x} A\, l(l-1)(l-2) x^{l-3} \stackrel{!}{=} x e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad l = 4, \quad A = \frac{1}{l(l-1)(l-2)}\Big|_{l=4} = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{24}$$

Die allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{1}{24} x^4\right) e^{-x}$$

(c_1, c_2, c_3 beliebige Konstante)

b) $y''' + 2y'' + y' = x + 2e^{-x}$

mit $u = y'$: $u'' + 2u' + u = x + 2e^{-x}$.

Eine Lösung der homogenen Gleichung ist e^{-x}.

Zur Lösung der inhomogenen (u-)Gleichung mache den Ansatz

$$u(x) = v(x) e^{-x} \qquad \text{(Abschnitt 7.2)}$$

$$\Rightarrow \quad u'' + 2u' + u = v'' e^{-x} = x + 2e^{-x}$$

also $v''(x) = x e^{x} + 2$

$$\Rightarrow \quad v(x) = xe^{x} - 2e^{x} + 2x + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y' = u = v e^{-x} = x - 2 + 2xe^{-x} + c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

also: $\underline{y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - x^2 e^{-x} + d_1 x e^{-x} + d_2 e^{-x} + d_3}$

d_1, d_2, d_3 beliebige Konst.

c) Das charakteristische Polynom ist

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

somit ist $u_1 = e^{x}$, $u_2 = e^{2x}$, $u_3 = e^{3x}$ ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung.

Lösung der inhomogenen Gleichung mit Variation der Konstanten (Satz 12) $y_p = \vec{u} \cdot \vec{v}$):

$$\begin{pmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1'(x) = \frac{1}{2} f(x) e^{-x}, \quad v_2'(x) = -f(x) e^{-2x}, \quad v_3'(x) = \frac{1}{2} f(x) e^{-3x}$$

und man erhält die allgemeine Lösung:

$$\underline{y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \left(e^{x-s} - 2e^{2(x-s)} + e^{3(x-s)}\right) f(s)\, ds}$$

A 2 Das charakteristische Polynom ist

$$x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 = x^2(x-a) + a^2(x-a)$$

$$= (x-a)(x^2+a^2)$$

so dass die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = c_1 e^{ax} + c_2 \cos(ax) + c_3 \sin(ax)$$

$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$ werden durch

$c_1 = \frac{1}{2a^2} = -c_2 = -c_3$ erfüllt:

$$y(x) = \frac{1}{2a^2}\left(e^{ax} - \cos(ax) - \sin(ax)\right)$$

A 3 a) $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = 0$

da das char Polynom $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ ist.

b) Hier ist das char Polynom $x^3(x-1)^2$, die DGL lautet also:

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$$

c) u_1, u_2 sind Linearkombinationen von

$$e^x e^{ix},\ e^{-x}e^{ix},\ e^x e^{-ix},\ e^{-x}e^{-ix}$$

Gesucht ist ein Polynom mit der doppelten Nullstelle 0 und den Nullstellen $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$:

$$x^2(x-(1+i))(x-(1-i))(x-(-1+i))(x-(-1-i))$$

$= x^6 + 4x^2$ und die zugehörige DGL ist

$$y^{(6)} + 4y'' = 0$$

A4 $\quad xy'' + (1-x)y' + y = 0 \,, \; x > 0.$

$u_1(x) = x - 1.$

Ansatz für u_2 : $\quad u_2(x) = v(x)(x-1)$

$$\Rightarrow \quad v''(x) - v'(x)\,\frac{1+x^2-4x}{x(x-1)} = 0$$

$$v''(x) + v'(x)\,(-f(x)) = 0$$

Ist F eine Stammfunktion von $-f$, so ist $e^{F(x)}$ integrierender Faktor:
man findet (Partialbruchzerlegung): $e^{F(x)} = \dfrac{x(x-1)^2}{e^x}$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^s}{s(s-1)^2}\,ds$$

also ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1(x-1) + c_2(x-1)\int_{x_0}^{x}\frac{e^s}{s(s-1)^2}\,ds$$

A5 $\quad$ a) $\quad xu' = u \quad \Rightarrow \quad \underline{u_1 = x}$

b) $\quad v' - v = x \quad \Rightarrow \quad \underline{v(x) = -x-1}$

c) $\quad xD^2 - (1+x)D + id = (xD - id)(D - id)$

Berechne u mit $(xD - id)(u) = 0$
und dann y mit $(D - id)(y) = u$,
insgesamt also y mit

$$(xD - id)(D - id)(y) = xy'' - (1+x)y' + y = 0$$

Aus a), b) folgt $\underline{y_1(x) = -x-1.}$

Mittels Reduktion der Ordnung: $y_2(x) = w(x)\,y_1(x)$

findet man $$w''(x) + w'(x)\,\frac{x^2+1}{-x^2-x} = 0$$

oder $$w(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{te^t}{(t+1)^2}\,dt$$

also $$\underline{y_2(x) = -(x+1)\int_{x_0}^{x} \frac{te^t}{(t+1)^2}\,dt}$$

y_1, y_2 ist ein Fundamentalsystem für $xy'' - (1+x)y' + y = 0$