A1| 1. H_n ist Polynom n-ten Grades

Zeige induktiv: $D^n(e^{-x^2}) = F_n(x)e^{-x^2}$ gilt

für $n=0,1,2,..$ mit einem Polynom n-ten Grades $F_n(x)$.

(einfach)

2. Für $y(x) = e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ ist

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \qquad (*)$$

nachzurechnen. Es gilt einerseits

$$(**) \qquad D^2(e^{-x^2}y) = D^{n+2}(e^{-x^2}) = e^{-x^2}(4x^2y - 2xy' - 2(n+1)y)$$

und andererseits $D^2(e^{-x^2}y) = e^{-x^2}(y'' - 4xy' + (4x^2-2)y)$

Vergleich dieser beiden Zeilen liefert $(*)$.

(Bemerkung: für $(**)$ ist eine Formel für $D^{n+1}(xf)$ nützlich)

3. Es gilt für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0$$

Mittels partieller Integration und $n > m \geq 0$ sieht man leicht ein: $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) P_m(x) e^{-x^2} dx = 0$

für ein beliebiges Polynom m-ten Grades. Induktion nach m.

42 $\quad y''-5y'+6y = 4xe^{x} - \sin x$

1. Homogenes Problem

allgemeine Lösung: $\underline{y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$, c_1, c_2 beliebig konstant

2. Inhomogene Gleichung

Variation der Konstanten (andere Möglichkeiten: Besprechung des 6. Ü-blattes)

$$y_p(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$$

Gleichungen für c_1, c_2: $\quad c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0$

$\quad c_1'(x)2e^{2x} + c_2'(x)3e^{3x} = 4xe^{x} - \sin x$

$\Rightarrow \quad c_1'(x)e^{2x} = -4xe^{x} + \sin x$

$\quad c_2'(x)e^{3x} = 4xe^{x} - \sin x$

$\Rightarrow \quad \underline{y_p(x) = e^{x}(2x+3) - \frac{1}{10}(\sin x + \cos x)}$

alle Lösungen: $\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$

$$y''' - 2y'' + y' = 1 + e^{x}\cos(2x)$$

1. allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\underline{y_h(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{x}}$$

2. inhomogenes Problem:

1) $y''' - 2y'' + y' = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{y_{p_1} = x}$

2) $y''' - 2y'' + y' = e^{x}\cos 2x = \mathrm{Re}\left(e^{(1+2i)x}\right)$

Ist $\tilde{y}_{p_2}$ Lösung von $y''' - 2y'' + y' = e^{x+2ix}$ (**)

so ist $y_{p_2}(x) = \mathrm{Re}(\tilde{y}_{p_2}(x))$ Lösung von (*).

Man findet leicht: $\underline{y_{p_2}(x)} = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{1+2i} e^{(1+2i)x}\right)$

$$= \underline{-\frac{e^x}{20}(\cos 2x + 2\sin 2x)}$$

also alle Lösungen:

$$\underline{y(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^x - \frac{e^x}{20}(\cos 2x + 2\sin 2x) + x}$$

c_1, c_2, c_3 beliebige Konst.

<u>A3</u> $\quad y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$

$$\parallel$$

$$(y' - 4y)' + x^2(y' - 4y) = 0$$

Mit $u := y' - 4y$ ist zu lösen:

$$\begin{cases} u' + x^2 u = 0 \\ y' - 4y = u \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = c_1 e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$y' - 4y = c_1 e^{-\frac{x^3}{3}} \qquad | \cdot e^{-4x}$$

$$(y e^{-4x})' = c_1 e^{-\frac{x^3}{3} - 4x}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = c_1 \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{t^3}{3} - 4t + 4x}\, dt + c_2 e^{4x}}$$

$$4x^2 y'' + 4xy' - y = 0 \qquad x \neq 0$$

$x > 0$: Substitution $x \to e^t$: $\varphi(t) := y(e^t)$, $y(x) = \varphi(\ln x)$

$$x y'(x) = e^t y'(e^t) = \dot\varphi(t)$$

$$x^2 y''(x) = e^{2t} y''(e^t) = \ddot\varphi(t) - \dot\varphi(t)$$

Die Dgl für y wird zur Dgl für φ:

$$4\ddot\varphi - 4\dot\varphi + 4\dot\varphi - \varphi = 0$$

$$\ddot\varphi(t) - \frac{1}{4}\varphi(t) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{-t/2}$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\frac{1}{\sqrt{x}}} \qquad (x > 0)$$

Wie ist das Vorgehen, falls eine Lösung für $x<0$ gesucht wird?

Ergebnis insgesamt für $x \neq 0$: $y(x) = A\sqrt{|x|} + B\frac{1}{\sqrt{|x|}}$

A, B beliebige Konstante

A4 $\quad y'' + 4xy' + q(x)y = 0$

$y_1(x) = u(x)$, $y_2(x) = x\,u(x)$, $u(0) = 1$

$w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = u^2$. Es gilt nach Vorlesung

$$w'(x) + 4x\,w(x) = 0 \Rightarrow w(x) = e^{-2x^2} w(0)$$

$$u^2(x) = e^{-2x^2} u^2(0)$$

also $\underline{u(x) = e^{-x^2}}$

Setze y_1 oder y_2 in die Dgl ein. Man liest ab: $\underline{q(x) = 2 + 4x^2}$

A5 $y_1(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - 3y' - 4y = 0$.

$y_2(x) = d_1 e^{x} + d_2 e^{-5x}$ ist die allgemeine Lösung von $y'' + 4y' - 5y = 0$.

Die Bedingungen an c_1, c_2, d_1, d_2 sind:

1) $y_1(0) = y_2(0) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$, $d_1 + d_2 = 0$

2) $y_1'(0) = y_2'(0) \iff \frac{5}{6} = \frac{d_1}{c_1}$

$$\Rightarrow \underline{u(x) = c_1 (e^{4x} - e^{-x})}$$

$$\underline{v(x) = \frac{5}{6} c_1 (e^{x} - e^{-5x})}$$

3) c_1 wird bestimmt aus $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(v(x))^4}{u(x)} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 c_1^3 \overset{!}{=} \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow \underline{c_1 = \frac{6}{5}}$$