Aufgabe 1)a) $2x^2y'' - xy' + y = x^2, x \neq 0$

1) $x>0$, homogene Gleichung

Ansatz $y = x^r \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y = c_1 x + c_2 \sqrt{x}$$

c_1, c_2 beliebig

$x<0$, homogene Gleichung

Der Ansatz $y = (-x)^r$ liefert: $y = c_1(-x) + c_2\sqrt{-x}$

also allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für $x \neq 0$:

$$y_{al} = c_1 x + c_2 \sqrt{|x|}$$

2) inhomogene Gleichung

Ansatz $y_p = ax^2$. Einsetzen ergibt: $y_p = \frac{1}{3}x^2$

Insgesamt: Allgemeine Lösung für $x \neq 0$:

$$\underline{y_{al} = c_1 x + c_2 \sqrt{|x|} + \frac{1}{3}x^2}$$

A 1b) Substituiere $x \to t$: $x = e^t$ $(x>0)$.

Für $\varphi(t) := y(e^t)$ geht die DGL für y über in die DGL

$$\ddot{\varphi}(t) - 3\dot{\varphi}(t) + 2\varphi(t) = 6t \quad (*)$$

für $\varphi(t)$.

Homogen $p(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1)$

$\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{2t}, \varphi_2(t) = e^t$ Fundamentalsystem

Für die inhomogene Gleichung (*) Ansatz: $\varphi_p(t) = at+b$

Einsetzen in (*) und Koeffizientenvergleich liefern
$a = 3$, $b = \frac{9}{2}$ und somit die allgemeine Lösung
für (*): $\varphi(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + 3t + \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + 3\ln x + \frac{9}{2} \quad , x>0$

die allgemeine Lösung der Anfangsgleichung.

Aufgabe 2 $\quad x^2 y'' + y = 0 \quad , \quad y(1) = y(b) = 0 \quad (b>1)$

Wegen der Randbedingungen ist die Gleichung für $x>0$ zu lösen.

Siehe 1b) $\quad y(x) \to \varphi(t) = y(e^t) \quad , y(x) = \varphi(\ln x)$

$x^2 y''(x) \to \ddot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(t)$

Die y-DGL wird zu: $\ddot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(t) + \varphi(t) = 0$

mit der allgemeinen Lösung $\varphi(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

und also:

$$y(x) = \sqrt{x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right) \quad , x>0 .$$

c_1, c_2 beliebig $\in \mathbb{R}$.

Für welche $b>1$ gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass $y(1) = y(b) = 0$ erfüllt sind?

$y(1) = 0 = c_1 \quad$, also: $y(x) = c_2 \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)$

$\underset{b>1}{y(b) = 0}$ ist erfüllt, falls $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln b = k\pi \quad , k = 1, 2 \dots$

Ergebnis: für $b_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right)$, $k = 1, 2 \ldots$

ist $y(x) = c_2 \sqrt{x}\, \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right), x > 0$, für jedes $c_2 \in \mathbb{R}$

Lösung der vorgelegten Randwertaufgabe.

Aufgabe 3 a) $L_1 y := y''' + a_1(x) y'' + a_2(x) y' + a_3(x) y = 0$ (*)

$y = z\varphi_1$ gibt mit der Information $L_1 \varphi_1 = 0$

und der Forderung $L_1 y = 0$ für z die folgende DGL

$$L_2 z = z''' + b_1(x) z'' + b_2(x) z' = 0$$

mit $b_1(x) = 3\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + a_1(x)$, $b_2(x) = 3\frac{\varphi_1''(x)}{\varphi_1(x)} + 2a_1(x)\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + a_2(x)$

(vgl Satz aus 7.2 (S. 17))

Man hat (obige Rechnung $L_1 y \to L_2 z$)

$$L_1(y) = L_1(z\varphi_1) = \varphi_1 L_2(z) = \varphi_1 L_2\left(\frac{y}{\varphi_1}\right)$$

Aus $L_1(\varphi_2) = 0$ folgt also $L_2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 0$.

$\Rightarrow \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'$ löst die Gleichung $h'' + b_1 h' + b_2 h = 0$

Diese Gleichung wird mit 7.2 gelöst: Ansatz $h(x) = z' = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' w$

$$7.2 \Rightarrow w'' + w' \underbrace{\left(2\frac{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)''(x)}{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(x)} + b_1(x)\right)}_{=: c_1(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad w'(x) = e^{-\int^x c_1(s)ds}$$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(x) \int^x e^{-\int^r c_1(s)ds} dr$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = \varphi_1(x) \int^x \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'(t) \left(\int^t e^{-\int^r c_1(s)ds} dr\right) dt}$$

b) $x^5 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$

$x \neq 0$

$y = zx$

$$\Rightarrow \quad x^3 z''' + 3x^2 z'' + z'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^3 z'' + z' = k_1 \quad (\text{konst})$$

$$z'' + \frac{1}{x^3} z' = \frac{k_1}{x^3} \qquad | \cdot e^{-\frac{1}{2x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad z' = k_1 + k_2 e^{\frac{1}{2x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = k_1 x + k_2 \int_{x_0}^x e^{\frac{1}{2t^2}} dt + k_3 \qquad (\text{etwa } x_0, x > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = k_3 x + k_1 x^2 + k_2 x \int_{x_0}^x e^{\frac{1}{2t^2}} dt}, \quad k_1, k_2, k_3 \text{ konstant}$$

Aufgabe 4

Vor Es gilt für $s \geq x_0$, $s \in I$ beliebig:

(1) $Lw(x;s) = (\partial_1^2 w)(x;s) + p(x)(\partial_1 w)(x;s) + q(x) w(x;s) = 0$, $x \in I$, $x \geq s$

(2) $w(s;s) = 0$, (3) $\partial_1 w(s;s) = f(s)$

mit $w(\cdot;s) \in C^2(I \cap \{x \geq s\})$.

Für $u(x) := \int_{x_0}^x w(x;s)ds$, $x \in I$, $x \geq s (\geq x_0)$ findet man:

$\underline{u(x_0) = 0}$

und mit $u'(x) = \underbrace{w(x;x)}_{=0,\ (\underline{2})} + \int_{x_0}^{x} D_1 w(x;s)\,ds$

$\underline{u'(x_0) = 0}$

und $\longrightarrow$ $u''(x) = \underbrace{D_1 w(x;x)}_{f(x),\ (\underline{3})} + \int_{x_0}^{x} D_1^2 w(x;s)\,ds$

$$\Rightarrow \quad L(u)(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} (Lw)(x;s)\,ds$$

$$= f(x) \quad \text{nach } (\underline{1}).$$

<u>Ergebnis</u>: u löst das Problem:

$$\begin{cases} Ly(x) = f(x), & x \geq x_0 \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0. \end{cases}$$