Zur 9. Übung HM III

Aufgabe 1

Die Lösung hat die Form $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,y^{(k)}(2)(x-2)^k$.

Gesucht ist $y(2)+y'(2)(x-2)+\frac{1}{2!}y''(2)(x-2)^2+\frac{1}{3!}y'''(2)(x-2)^3$
$+\frac{1}{4!}y^{(IV)}(2)(x-2)^4$

$\underline{y(2)=e\,,\ y'(2)=e^2}$ sind durch die Aufgabe gegeben.

Aus der Dgl $y''+y'-\ln y=e^x\,,\ y(2)=e,\ y'(2)=e^2$
folgt $\underline{y''(2)}=-e^2+1+e^2\underline{=1}$

Aus der Dgl folgt: $y'''=-y''+\frac{1}{y}y'+e^x$ $\underline{(1)}$

$y^{(IV)}=-y'''-\frac{1}{y^2}(y')^2+\frac{1}{y}y''+e^x$ $\underline{(2)}$

$\underline{(1)}\Rightarrow \underline{y'''(2)=-1+e+e^2}$

$\underline{(2)}\Rightarrow \underline{y^{(IV)}(2)}=1-e-e^2-\frac{1}{e^2}e^4+\frac{1}{e}+e^2\ \underline{=1+\frac{1}{e}-e^2-e}$

Aufgabe 2 (Bezeichnungen gemäß Kap 8)

$$x^2y''+x\underbrace{(x-3)}_{=p(x)}y'+\underbrace{3}_{=q(x)}y=0\quad,\ x\neq 0$$

$p(x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j x^j \Rightarrow p_0=-3,\ p_1=1,\ p_j=0\ (j\geq 2)$

$q(x)=3 \Rightarrow q_0=3,\ q_j=0\ (j\geq 1)$.

Die Indexgleichung lautet $f(\rho)=\rho^2-4\rho+3=(\rho-3)(\rho-1)=0$

$\rho_1=3,\ \rho_2=1$

Der Satz aus Kap 8 besagt, dass eine Lösung y_1 die Form $\underline{y_1(x) = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k x^k} = \underline{\sum_{k=3}^{\infty} c_k x^k}$ hat.

Wird dies in die DGl eingesetzt, so erhält man:

$$x^2 y_1'' + (x^2 - 3x) y_1' + 3 y_1 = \sum_{k=4}^{\infty} (k-1)\left[c_k(k-3) + c_{k-1}\right] x^k \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Rekursionsformel: $c_k = -\dfrac{c_{k-1}}{k-3}$, $k = 3, 4, \dots$

Mit c_3 beliebig, wir setzen $c_3 = 1$, sind hierdurch die c_k, $k \geq 4$, bestimmt:

Man erhält (Induktion): $\underline{c_{k+3} = (-1)^k \frac{1}{k!}}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

also $\quad y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+3} x^{k+3} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} x^k$

$$\underline{y_1(x) = x^3 e^{-x}}$$

Eine zweite hiervon l.u. Lösung y_2 wird mit Reduktion der Ordnung berechnet:

$$y_2(x) = x^3 e^{-x} v(x)$$

Einsetzen gibt: $\quad x v''(x) + (3 - x) v'(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^s}{s^3}\, ds \qquad (x_0, x > 0 \text{ oder } x_0, x < 0)$$

$$\underline{y_2(x) = x^3 e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^s}{s^3}\, ds}$$

Die allgemeine Lösung ist $\underline{y(x) = c_1 x^3 e^{-x} + c_2 x^3 e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^s}{s^3}\, ds},$

c_1, c_2 konst., beliebig

<u>Aufgabe 3</u> $\quad xy'' + y' - y = 0 \qquad x \neq 0 \quad (x > 0)$

$\Rightarrow \quad x^2 y'' + x y' - x y = 0$

Man liest ab (Bezeichnungen Kap 8)

$p_0 = 1,\ p_j = 0\ (j \geq 1), \quad q_0 = 0,\ q_1 = -1,\ q_j = 0\ (j \geq 2)$

$f(\rho) = \rho^2 \qquad : \underline{\rho = 0}\ , \ \underline{c_0 = 1\ \text{(Wahl)}}$

Also Ansatz: $\quad y_1(x) = 1 + \sum_{k \geq 1}^{\infty} c_k x^k$

In die Dgl einsetzen:

$x y_1'' + y_1' - y_1 = -1 + c_1 + \sum_{k \geq 1}^{\infty} [-c_k + (k+1)^2 c_{k+1}] x^k \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad \underline{c_1 = 1\ , \quad c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} c_k\ , \ k = 1, 2, \dots}$

$\Rightarrow$ (Induktion) $\quad c_k = \frac{1}{(k!)^2} \qquad k = (0), 1, 2, \dots$

oder $\quad \underline{y_1(x) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^k}$

Eine zweite von y_1 l.u. Lösung erhält man etwa so:

Setze $\ y(x, \rho) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} c_k(\rho) x^{k+\rho}$ in die Dgl ein. Man findet.

$$Ly = xy'' + y' - y = c_0 \rho^2 x^{\rho - 1} + x^{\rho - 1} \sum_{k \geq 1}^{\infty} [c_k (k+\rho)^2 - c_{k-1}] x^k \overset{!}{=} 0$$

Setze $c_0 = 1$ (oder beliebig, aber $\neq 0$). Berechne $c_k(\rho)$ $(k \geq 1)$ so, dass $\underline{[\cdots] = 0\ \ (R)}$ wird.

$y(x, \rho)$ liegt dann fest. Es gilt

$L y(x,\rho) = \rho^2 x^{\rho-1} \Rightarrow$ wegen $\partial_\rho(Ly(x,\rho)) = L(\partial_\rho y(x,\rho))$ folgt

für $y(x) := \partial_\rho y(x,\rho)$:

$$xy'' + y' - y = 2\rho x^{\rho-1} + \rho^2 \ln|x| x^{\rho-1} \qquad (x>0)$$

Man liest ab: <u>für $y_2(x) := \partial_\rho y(x,\rho)|_{\rho=0}$</u>

<u>gilt $xy'' + y' - y = 0$.</u>

<u>Berechnung von $y_2(x)$:</u>

$$(R) \Rightarrow c_k = \frac{c_{k-1}}{(k+\rho)^2} = \frac{c_{k-2}}{(k+\rho)^2(k+\rho-1)^2}$$

$$= \dots = \frac{\overset{=c_0}{1}}{(k+\rho)^2(k+\rho-1)^2\cdots(\rho+1)^2}$$

$$k = 1,2,\dots$$

also: $\underline{c_k(\rho) = \dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k}(j+\rho)^2}}$, $k=1,2\dots$ $\qquad \underline{(1)}$

$$\Rightarrow \partial_\rho y(x,\rho) = \partial_\rho\Big[x^\rho\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(j+\rho)^2}x^k\Big)\Big]$$

$$= (\ln x)\, x^\rho \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\prod_{j=1}^{k}(j+\rho)^2\Big)^{-1} x^k\Big)$$

$$+ x^\rho\Big(\underbrace{-\frac{2}{(\rho+1)^2}}_{=:b_1(\rho)} x \underbrace{-2\Big(\frac{1}{(\rho+1)^3(\rho+2)^2} + \frac{1}{(\rho+1)^2(\rho+2)^3}\Big)}_{:=b_2(\rho)} x^2 + \dots\Big)$$

$$\partial_\rho y(x,\rho)|_{\rho=0} = y_2(x) = \ln(x)\, y_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) x^k$$

Berechnung der $b_k(0)$:

Wegen (1) $\quad b_k(0) = c_k'(\rho)\big|_{\rho=0} \quad k=1,2\ldots$

(R) besagt und aus (R) folgt:

$$(k+\rho)^2 c_k(\rho) - c_{k-1}(\rho) = 0$$
$$2(k+\rho)c_k(\rho) + (k+\rho)^2 c_k'(\rho) - c_{k-1}'(\rho) = 0 \qquad k=1,2\ldots \quad (c_0 = 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_k'(\rho)}{c_k(\rho)} = \frac{c_{k-1}'(\rho)}{c_{k-1}(\rho)} - 2(k+\rho)\frac{c_k(\rho)}{c_{k-1}(\rho)} = \frac{c_{k-1}'}{c_{k-1}} - \frac{2}{k+\rho}, \; k\geq 1$$

$$\rho = 0: \quad \frac{b_k}{c_k} = \frac{b_{k-1}}{c_{k-1}} - \frac{2}{k}, \; k \geq 1, \quad \frac{b_0}{c_0} = 0$$

$(b_k = b_k(0))$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{c_k} - \frac{b_{k-1}}{c_{k-1}}\right) = \frac{b_n}{c_n} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}$$

Also: $\quad b_n = -2c_n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

$$b_n(0) = -2\frac{1}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right), \quad n = 1,2\ldots$$

Aufgabe 4

a) Man hat $\quad u(x_0) = a_0,\; u'(x_0) = a_1,$
$\qquad v(x_0) = b_0,\; v'(x_0) = b_1.$

$$w(x_0) = \det\begin{pmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0)\end{pmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0$$

b) Es gelte $W(x_0) = a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$.

Betrachte $\alpha u(x) + \beta v(x) = 0$ für $|x-x_0| < r$.
α, β konst.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)(x-x_0)^k = 0$$

Koeffizientenvergleich: $\alpha a_k + \beta b_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

insbesondere: $\alpha a_0 + \beta b_0 = 0$
$\alpha a_1 + \beta b_1 = 0$

Mit $W(x_0) \neq 0$ folgt $\alpha = \beta = 0$. ✓