KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2011/2012
23.12.2011

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik

Aufgabe 1:

Berechnen Sie zwei l.u. Potenzreihen–Lösungen der Hermite DGl

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

auf einem Intervall der Form $(-r, r)$. Zeigen Sie, dass eine dieser Lösungen ein Polynom ist, wenn α eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Aufgabe 2:

$$P, Q : J \to \mathbb{R}^{(n,n)} \ (J \text{ ist ein Intervall in } \mathbb{R})$$

seien differenzierbare Matrix Funktionen, gegebenenfalls regulär.

Begründen Sie die folgenden Differentiationsregeln:

a) $(PQ)' = P'Q + PQ'$,

b) $(Q^{-1})' = -Q^{-1}Q'Q^{-1}$,

c) $(PQ^{-1})' = -PQ^{-1}Q'Q^{-1} + P'Q^{-1}$,

d) $(P^3)' = P^2P' + PP'P + P'P^2$,

vermuten Sie eine allgemeine Formel für $(P^k)'$ $(k \in \mathbb{N})$ und beweisen Sie diese induktiv.

Aufgabe 3:

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$$

mit dem Ansatz $\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{v}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Substuieren Sie $\vec{y}(x) \to \vec{u}(x)$ mit $\vec{y}(x) = P\vec{u}(x)$ mit einer geeigneten regulären Matrix P.

Aufgabe 4:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{(2,2)}$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ besitze die Lösung $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Intervall $J \subset I$ gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle x.

Man zeige: Durch den Ansatz $\vec{\chi} : J \to \mathbb{R}^2,\ \vec{\chi}(x) = u(x)\vec{\varphi}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$ erhält man eine zweite, von $\vec{\varphi}$ linear unabhängige Lösung $\vec{\chi}$.

Frohe Weihnachten

Karlsruher Institut für Technologie