**A1** $\underline{y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0}$ $\qquad (*)$

Der Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ liefert

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 2(a_2 + \alpha a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (2\alpha - 2k)a_k] x^k = 0$$

Es folgt die Rekursionsformel (Koeffizientenvergleich)

$$\underline{a_{k+2} = 2\,\frac{k-\alpha}{(k+2)(k+1)}\,a_k} \quad , k = 0,1,2\ldots \qquad \underline{(R)}$$

Zwei l. u. Lösungen erhält man durch z. B.

1. $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ $\quad (y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0)$
2. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ $\quad (y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1)$ $\quad$ (vgl A4 9. Ü)

1. $a_0 = 1,\ a_1 = 0 \overset{(R)}{\Longrightarrow} \underline{a_{2k+1} = 0 \quad k = 0,1,2,\ldots}$

und mit (R) in der Form: $a_{2k+2} = 2\,\frac{2k-\alpha}{(2k+2)(2k+1)}\,a_{2k}$, $k = 0,1,\ldots$

mittels Induktion: $\underline{a_{2k} = (-1)^k 2^k \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2(k-1))}{(2k)!}}$ $\quad k = 1,2,\ldots$

also: $y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$, konvergent für alle $x$.

2. $a_0 = 0, a_1 = 1 \overset{(R)}{\Longrightarrow} \underline{a_{2k} = 0 \quad k = 0,1,2,\ldots}$

und mit ((R)) $a_{2k+1} = 2\,\frac{2k-1-\alpha}{(2k+1)2k}\,a_{2k-1}$ , $k = 1,2\ldots$

und mit Induktion folgt:

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^k \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

auch $y_2$ ist für alle $x$ konvergent.

Für $\alpha = 2m$ mit einer Zahl $m \in \mathbb{N}$ erhält man im Fall 1: $a_{2k} = 0$, $k \geq m+1$. $y_1$ ist ein Polynom $2m$-ten Grades.

Analog ist im Fall 2. und $\alpha = 2m+1$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ $a_{2k+1} = 0$, $k \geq m+1$, so dass $y_2$ ein Polynom $(2m+1)$-ten Grades ist.

---

<u>A2</u> a)
$$(PQ)'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big((PQ)(t+h) - (PQ)(t)\big)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\big(P(t+h) - P(t)\big)Q(t+h) + P(t)\big(Q(t+h) - Q(t)\big)\Big)$$
$$= P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)$$

b) Ist $Q$ regulär und diff'bar, so ist auch $Q^{-1}$ diff'bar (die Elemente von $Q^{-1}$ sind rationale Ausdrücke der Elemente von $Q$).
Die Formel ergibt sich wenn man
$$Q^{-1}(t)\,Q(t) = E$$
differenziert und a) verwendet. Die Ableitung der konstanten Matrix $E$ ist die Nullmatrix $\mathcal{O}$.

c) Verwende a) und b).

d) Verwende a) mehrmals.
$$(P^k)' = \sum_{m=0}^{k-1} P^m P' P^{k-1-m} \quad , k = 1, 2, \ldots$$

Dies begründet man leicht mit Induktion.

---

**A3a)** $\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$

Der Ansatz $\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{v}$ liefert

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -8 & 8-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

EWP (HMII)

$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 6 \pm 2i \quad$ und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix}$

und die Lösungen $\underline{\vec{y}_1(x) = e^{6x+2ix}\begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{y}_2(x) = e^{6-2ix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix}}$.

Es ist $\vec{y}_2(x) = \overline{\vec{y}_1(x)}$. Ein reelles Fundamentalsystem

ist $\underline{\operatorname{Re}\vec{y}_1(x) = e^{6x}\begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ 4\cos 2x \end{pmatrix}, \ \operatorname{Im} y_2(x) = e^{6x}\begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ -4\sin 2x \end{pmatrix}}$

**A3b)** $A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich mittels einer

orthogonalen Matrix $P$ auf Diagonalform transformieren.
In der Diagonalen stehen die EW von $A$. In den Spalten
von $P$ stehen die normierten EV von $A$.

EW: $\quad 0 = \det(A - \lambda E) = \lambda(6-\lambda)(6+\lambda) \ : \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 6, \ \lambda_3 = -6$

EV zu $\lambda_1 = 0$ : $\quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_2 = 6$ : $\quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_3 = -6$ : $\quad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

gelten: $P^{-1} = P^T$, $\quad P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Aus $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ wird mit $\vec{y} = P\vec{u}$

$P\vec{u}\,' = AP\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \vec{u}$

d.h.:
$$u_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = c_1$$
$$u_2' = 6u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2(x) = c_2 e^{6x}$$
$$u_3' = -6u_3 \quad \Rightarrow \quad u_3(x) = c_3 e^{-6x}$$

($c_1, c_2, c_3$ beliebige Konstante)

$\Rightarrow \quad \vec{y}(x) = P\vec{u}(x)$
$$y_1(x) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} - \frac{c_2}{\sqrt{3}} e^{6x} - \frac{c_3}{\sqrt{6}} e^{-6x}$$
$$y_2(x) = \frac{c_2}{\sqrt{3}} e^{6x} - \frac{2}{\sqrt{6}} c_3 e^{-6x}$$
$$y_3(x) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 e^{6x} + \frac{c_3}{\sqrt{6}} e^{-6x}$$

---

**A4** gegeben ist
$$\vec{\varphi}\,'(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \vec{\varphi}(x), \quad x \in I, \qquad (1)$$

mit $\varphi_1(x) \neq 0$, $x \in J \subset I$.

Gesucht sind $u : J \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ derart, dass für $\vec{\chi}(x) := u(x)\vec{\varphi}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$ $\quad$ (2)

$$\vec{\chi}\,'(x) = A(x)\vec{\chi}(x) \text{ gilt.}$$

($\vec{\chi}$ ist l.u. von $\vec{\varphi}$).

$\vec{\chi}\,'(x) = A(x)\vec{\chi}(x)$ bedeutet mit (2)

$$u'(x)\varphi_1(x) = a_{12}(x)g(x) \qquad (3)$$
$$u'(x)\varphi_2(x) + g'(x) = a_{22}g(x) \qquad (4)$$

Setze $u'$ aus (3) in (4):

$$g'(x) = \left(a_{22}(x) - a_{12}(x)\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right)g(x)$$

Berechne hieraus $g$. Und mit diesem $g$ $u$ aus (3).
Das geht immer.