

## 11. Übungsblatt

### Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik

#### Aufgabe 1:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung

$$\text{a) } \begin{aligned} y_1''(x) &= y_1'(x) - 2y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1'(x) + y_1(x) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y_1''(x) - 2y_2'(x) - y_2(x) &= 0 \\ y_1'(x) + 2y_1(x) + y_2'(x) + 2y_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Schreiben Sie jeweils das vorliegende System als ein System von Gleichungen 1. Ordnung.

#### Aufgabe 2:

Berechnen Sie  $e^{tA}$  für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabe 3:

Es sei  $A$  eine  $(3, 3)$ -Matrix, die den 3fachen Eigenwert  $\lambda$  hat. Rechnen Sie nach, dass  $e^{tA} = e^{\lambda t}(E + t(A - \lambda E) + \frac{1}{2}t^2(A - \lambda E)^2)$  gilt.

Verwenden Sie das folgende Ergebnis:

Ist  $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ , so gilt  $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0E = 0$  (vergleiche Kap. 24/insbesondere 24.4 Satz 3).

#### Aufgabe 4:

Es sei  $A = A(x)$ ,  $x \in J$ , eine stetige,  $(n, n)$ -matrixwertige Funktion.

$\vec{y}_j = \vec{y}_j(x)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) seien Lösungen des DGLsystems

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x).$$

Bilde mit der  $(n, n)$ -Matrix  $Y(x) := [\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)]$   $W(x) := \det Y(x)$ .

Begründen Sie in den Fällen  $n = 2, 3$ :

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x \text{spur}(A(s))ds\right).$$

Versuchen Sie sich am allgemeinen Fall.