Zum 11. Übblatt HM III WS 2011/12

A 1a) Setze $u_1 = y_1$, $u_2 = y_1'$, $u_3 = y_2$. Damit wird die vorgelegte Aufgabe zu

$$\vec{u}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{u}(t) \quad \text{mit } \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

gesucht sind 3 l.u. Lösungen $\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}$.

Ansatz wie in A3/10.Ü (oder Vorlesung vom 19.1.)

$\vec{u}(x) = e^{\lambda x}\vec{v}$ mit: λ EW von A und $\vec{v}$ zugehöriger EV.

EW: $\det(A - \lambda E) = -(\lambda^2+1)(\lambda-1) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ $\Rightarrow$ es gibt 3 l.u. EV

EV zu $\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}^{(1)}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = i$: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{u} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}$

Man erhält zwei weitere l.u. Lösungen $\vec{u}^{(2)}(t) = \operatorname{Re} \vec{u}(t)$, $\vec{u}^{(3)}(t) = \operatorname{Im} \vec{u}(t)$:

$$\vec{u}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Die allgemeine $\vec{u}$-Lösung: $c_1 \vec{u}^{(1)}(t) + c_2 \vec{u}^{(2)}(t) + c_3 \vec{u}^{(3)}(t)$

$\Rightarrow$ (zurück zu y_1, y_2):

$y_1(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$, $y_2(t) = 2c_1 e^t + (c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + c_3)\sin t$

c_1, c_2, c_3 beliebig konstant

A 1b) Wie vorher setze $u_1 = y_1, u_2 = y_1', u_3 = y_2$.

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ kann das vorgelegte Gleichungssystem

so geschrieben werden:

$$\vec{u}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \vec{u}(t)$$

gesucht sind drei l. u. Lösungen $\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}$.

Vorgehen wie vorher: EW λ, EV $\vec{v}$ von A bestimmen: $e^{\lambda t}\vec{v}$ sind Lösungen.

$$\det(A - \lambda E) = -(2+\lambda)(\lambda+1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1, \lambda_3 = -2$$

EV zu $\lambda_{1/2} = -1$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}^{(1)}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gibt keine weiteren EV zu $\lambda_1 = -1$.
Eine weitere zu $\lambda = -1$ gehörende l. u. Lösung erhält man mit dem Ansatz:

$$\vec{u}^{(2)}(t) = (\vec{b}_0 + \vec{b}_1 t)e^{-t}$$

Aus der Forderung $\vec{u}^{(2)\prime}(t) = A\vec{u}^{(2)}(t)$ folgen

$(A+E)\vec{b}_1 = \vec{0}$ und $(A+E)\vec{b}_0 = \vec{b}_1$

$\Downarrow$

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

also: $\vec{u}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -te^{-t} \\ (-1+t)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$

Lösung zu $\lambda_3 = -2$: $\vec{u}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}$

$\uparrow$ EV zu $\lambda_3 = -2$.

Zurück zu y_1, y_2 erhält man:

$$\underline{y_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 3c_3 e^{-2t}}$$

$$\underline{y_2(t) = -c_1 e^{-t} - c_2 t e^{-t} - 4c_3 e^{-2t}}$$

c_1, c_2, c_3 beliebig konst.

$\underline{A21}$ e^{tA} ist die Matrixlösung $X(t)$ von

$$X'(t) = A X(t),\ t \in \mathbb{R},\ X(0) = E.$$

gesucht sind $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \vec{x}_3(t)$ mit

$$\vec{x}_j{}'(t) = A\vec{x}_j(t),\quad \vec{x}_j(0) = \vec{e}_j. \qquad \left(X(t) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \vec{x}_3(t)]\right)$$

Lösung wie vorher (16/1):

EW von A:

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -1,\ \lambda_3 = -2$

mit EV zu $\lambda_{1/2}$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{\vec{x}^{(1)}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Eine weitere Lösung zu $\lambda_{1/2} = -1$ erhält man durch den Ansatz $\vec{x}^{(2)}(t) = (\vec{b}_0 + \vec{b}_1 t)e^{-t}$. Das bedeutet

$(A+E)\vec{b}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(A+E)\vec{b}_0 = \vec{b}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ -t \end{pmatrix} e^{-t}}$

EV zu $\lambda_3 = -2$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\vec{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}}$

$\tilde{X}(t) = [\vec{x}^{(1)}(t), \vec{x}^{(2)}(t), \vec{x}^{(3)}(t)]$ ist eine Fundamentalmatrix

Die allgemeine Lösung von $X'(t) = A\,X(t)$ ist durch $\tilde{X}(t)\,C$, C konst $(3,3)$Matrix, gegeben.

Gesucht ist C so, dass $\tilde{X}(0)\,C = E$, also

$C = \tilde{X}(0)^{-1}$! $\Rightarrow X(t) = e^{At} = \tilde{X}(t)\,\tilde{X}(0)^{-1}$.

Mit $\tilde{X}(t) = [\vec{x}^{(1)}(t), \vec{x}^{(2)}(t), \vec{x}^{(3)}(t)]$ erhält man

$$\tilde{X}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \underline{\begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} & (1+t)e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -te^{-t} & -te^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ te^{-t} & te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}}$$

A3 Die EW-Gleichung ist

$$\det(\mu E - A) = \mu^3 + c_2\mu^2 + c_1\mu + c_0 = 0$$

Die gegebene Information ist:

$$\det(\mu E - A) = (\mu - \lambda)^3 = 0 \qquad \mu = \lambda \text{ ist 3facher EW}$$

Das Ergebnis, das verwendet werden ~~soll~~ darf, bedeutet, dass folgt: $(A - \lambda E)^3 = 0$.

Es gilt $e^{tA} = e^{t\lambda E} e^{t(A-\lambda E)}$

$$= e^{t\lambda}\left(E + t(A-\lambda E) + \frac{1}{2}t^2 (A-\lambda E)^2 \right),$$

da gemäß oben $(A-\lambda E)^k = 0$, $k \geq 3$.

A4 (mit A 2, 5. Ü) gegeben sind Lösungen $\vec{y}_j$ ($j=1,\dots,n$)

von: $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x)$.

Differenziere $W(x) = \det(\overbrace{\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)}^{Y(x)})$

$$W'(x) = \det(\vec{y}_1\,'(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)) + \det(\vec{y}_1, \vec{y}_2\,'(x), \vec{y}_3(x), \dots, \vec{y}_n)$$
$$+ \dots + \det(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{n-1}, \vec{y}_n\,'(x))$$

$$W'(x) = \sum_{j=1}^{n} \det(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{j-1}, A\vec{y}_j, \vec{y}_{j+1}, \dots, \vec{y}_n) \qquad \underline{(1)}$$

Es gilt $\det((\lambda E - A)Y) = \det(\lambda E - A)\det(Y)$

HM II $\qquad = [\lambda^n - \lambda^{n-1}\operatorname{spur}(A) + \dots + (-1)^n \det(A)]\,W \qquad \underline{(2)}$

Andererseits ebenfalls mit HM II:

$$\det((\lambda E - A)Y) = \det(\lambda\vec{y}_1 - A\vec{y}_1, \lambda\vec{y}_2 - A\vec{y}_2, \dots, \lambda\vec{y}_n - A\vec{y}_n)$$

Linearität der Det in den Spalten $\stackrel{\wedge}{=} \lambda^n \det Y - \lambda^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \det(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{k-1}, A\vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}, \dots, \vec{y}_n)$

$$+ \dots + (-1)^n \det(A)\det Y \qquad \underline{(3)}$$

Vergleicht man $\underline{(2)}$ mit $\underline{(3)}$, so folgt $\operatorname{spur}(A)W(x) = $ die rechte Seite von $\underline{(1)}$:

Also : $W'(x) = \text{Spur}(A(x))\, W(x)$

$$\Rightarrow \quad W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} (\text{Spur}\, A(s))\, ds \right)$$