A1 1) Zunächst wird das homogene System betrachtet:

$$(1) \quad t y_1' = y_1 - t y_2 \qquad (t > 0)$$
$$(2) \quad t^2 y_2' = y_1 + 2t y_2$$

Ansatz: $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \; y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$

(1) liefert: $0 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - k a_k - b_{k-1}) t^k \qquad (3)$

(2) liefert: $0 = a_0 + (a_1 + 2b_0)t + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k + (3-k) b_{k-1}) t^k \qquad (4)$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_0 = 0$$
$$a_1 + 2b_0 = 0$$
$$a_k(1-k) = b_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots$$
$$a_k = (k-3) b_{k-1} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_k(1 + (1-k)(3-k)) = 0, \; k = 2, 3, \ldots \qquad (5)$$

Man erhält: $a_0 = 0, \; b_0 = 0, \; a_1 = 0$

Aus (5) $a_2 \cdot 0 = 0$. Wähle $a_2 = 1$.

Aus (5) folgt für $k \geq 3$: $a_k = 0$.

Weiter $a_2 = -b_1 = 1$. Wegen $a_k = 0$ für $k \geq 3$ gilt $b_k = 0$ für $k \geq 2$.

Insgesamt also: $y_1(t) = t^2, \; y_2(t) = -t$

Eine Lösung des homogenen Systems ist $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$.

Mit A4/10.Ü erhält man eine zweite l.u. Lösung $\vec{\chi}$ durch $\vec{\chi}(t) = u(t)\vec{\varphi}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$.

g berechnet sich aus (A4/10.ii bezieht sich auf

$$y_1' = \frac{1}{t} y_1 - y_2, \quad y_2' = \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 \quad):$$

$$g'(t) = \frac{1}{t} g(t) \qquad \text{zu } g(t) = t$$

Hiermit gilt $u'(t) = -\frac{1}{t}$ oder $u(t) = -\ln t$

also $\vec{Y}(t) = -\ln t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t + t\ln t \end{pmatrix}, t > 0.$

Ergebnis: Fundamentalmatrix $Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t\ln t \end{pmatrix}$

2) Inhomogene Gleichung mit Variation der Konstanten (Abschnitt 9.(2)

Der Ansatz $\vec{y}_p(t) = Y(t)\,\vec{v}(t)$ führt zu

$$\vec{y}_p(t) = \int_1^t Y(t)\, Y(s)^{-1} \begin{pmatrix} s \\ -s^2 \end{pmatrix} ds \qquad (t > 0)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 (t^2 - 1 + 2\ln t - 2(\ln t)^2) \\ t(3 - 3t^2 + 2\ln t + 2(\ln t)^2) \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\vec{y}(t) = Y(t)\vec{c} + \vec{y}_p(t)$$

für jeden konstanten Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$.

A2 EW von $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$:

$\det(A - \lambda E) = -(\lambda+1)^3$: $\lambda = -1$ ist 3fache EW

Nach A3 vom 11. Übblatt gilt:

$$e^{At} = e^{-t}\left[E + (A+E)\,t + (A+E)^2\frac{t^2}{2}\right]$$

Man rechnet nach $(A+E)^2 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, so

dass man erhält

$$e^{At} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1-4t-3t^2 & -5t-\frac{3}{2}t^2 & -9t \\ 8t+6t^2 & 1+10t+3t^2 & 18t \\ -2t-2t^2 & -3t-t^2 & 1-6t \end{pmatrix}$$

Die drei Spalten von e^{At} bilden ein Fundamentalsystem. (e^{At} ist die Fundamentalmatrix, die $e^{At}\big|_{t=0} = E$ erfüllt.)

A3 $$\dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) <u>Homogenes Problem</u>

$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-6)(\lambda-1)$

EW: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$

$(-3te^{t} - \frac{55}{5}e^{t} + \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{41}{}e^{6t})$

A4

Wegen $\|A\|<1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ gemäß Satz 6 / 9.4

konvergent, da $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ gilt und da

$\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ konvergiert (geom. Reihe). Setze

$$B := \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \text{ d.h.: } S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \to B \quad (n \to \infty).$$

Mit
$$\left.\begin{array}{l} S_n(E-A) = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = E - A^{n+1} \\ \quad \shortparallel \\ (E-A)S_n \end{array}\right\} (*)$$

und mit $A^{n+1} \to 0 \; (n \to \infty)$ (wegen $\|A\|<1$)

folgt für $n \to \infty$ in $(*)$:

$$B(E-A) = (E-A)B = E$$

Das bedeutet: $(E-A)^{-1}$ existiert, und es gilt

$$(E-A)^{-1} = B = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$