KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2011/2012
27.01.2012

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Lösung an, die $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Aufgabe 2:

Mittels des Ansatzes $u(x,t) = \varphi(x)\chi(t)$ (mit zu berechnenden Funktionen φ, χ) löse man das Problem

$$\begin{aligned} &D_1^2 u(x,t) - D_2 u(x,t) = 0\,,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\,, \\ &u(x,0) = f(x)\,,\ 0 \le x \le \ell\,, \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

f ist eine vorgegebene stetige Funktion und $\ell > 0$ eine feste Zahl.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie Lösungen $z = u(x,y)$ der Gleichung

$$y\, D_1 u(x,y) - x\, D_2 u(x,y) = 0\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Führen Sie anstelle der Variablen x, y durch $x = r\cos t$, $y = r \sin t$ die Variablen r, t ein.

Aufgabe 4:

Es sei A eine reguläre (n,n)–Matrix und $\vec{y} = A\vec{x}$ und $u(\vec{x}) := v(A\vec{x})$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Begründen Sie:

Man hat $(\triangle_{\vec{x}} u(\vec{x}) = 0 \Longleftrightarrow \triangle_{\vec{y}} v(\vec{y}) = 0)$ dann und nur dann, wenn gilt $A = \lambda B$ mit einer orthogonalen Matrix B und einer positiven Konstanten λ.

(Zur Erinnerung: $\bigtriangledown_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$, $\triangle_{\vec{x}} = \bigtriangledown_{\vec{x}}^T \bigtriangledown_{\vec{x}}$)